TD VI : Gaussiennes

- — 13 Octobre 2025-17 octobre 2025
- — Master I ISIFAR
- — **Probabilités**

Exercice 1 (Lemme de Stein).

Vérifier que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$
2. Pour toute fonction g absolument continue avec une dérivée g' telle que $\mathbb{E}[|Xg(X)|] < \infty$, on a

   a. $g'(X)$ intégrable

   b. $\mathbb{E}[g'(X)] = \mathbb{E}[Xg(X)]$

Exercice 2 (Invariance par rotation). Si $X \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Id}_n)$, et A est une matrice orthogonale ($A \times A^\top = A^\top \times A = \mathrm{Id}_n$), comment est distribué AX ?

Exercice 3 (Maxima de Gaussiennes).

Vérifier que si $X_1, \ldots, X_n \sim_{\text{i.i.d.}} \mathcal{N}(0,1)$:

$$\mathbb{E}\left[\max(X_1, \ldots, X_n)\right] \leq \sqrt{2 \ln n}$$

Suggestion : Majorer $\mathbb{E}\mathrm{e}^{\lambda \max(X_1,\ldots,X_n)}$ en comparant à $\mathbb{E}\sum_{i=1}^n \mathrm{e}^{\lambda X_i}$. Comparer $\mathbb{E}\mathrm{e}^{\lambda \max(X_1,\ldots,X_n)}$ et $\mathrm{e}^{\lambda \mathbb{E}\max(X_1,\ldots,X_n)}$.

Exercice 4 (Norme de vecteurs gaussiens centrés).

Montrer que X est un vecteur gaussien centré, la loi du carré de la norme euclidienne de X ne dépend que des valeurs propres de la matrice de covariance.

Exercice 5 (Norme de vecteurs gaussiens non centrés).

Montrer que X est un vecteur gaussien standard et μ un vecteur, la loi du carré de la norme euclidienne de $X + \mu$ ne dépend que la norme de μ.

Montrer que

$$P\{\|X + \mu\| \leq x\} \leq P\{\|X\| \leq x\}$$

Suggestion : vérifier que c'est vrai en dimension 1, utiliser un argument de couplage.

Exercice 6 (Ratios de Mills).

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. On note Φ la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$, et ϕ sa densité.

Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{x}\phi(x) \leq 1 - \Phi(x) \leq \frac{1}{x}\phi(x)$$

Suggestion : utiliser l'intégration par parties.

Exercice 7. Dans cet exercice $T \sim \mathcal{N}(\mu, \tau^2)$ et la distribution conditionnelle de X sachant T est $\mathcal{N}(T, \sigma^2)$.

a. Caractériser la loi jointe de (T, X).
b. Quelle est la loi de X ?
c. Quelle est la distribution conditionnelle de T sachant X ?

Exercice 8 (Conditionnement gaussien)**.**

Soit $\rho \in]-1, 1[$ et (X, Y) un vecteur gaussien centré de matrice de covariances

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

On notera $\sigma = \sqrt{1-\rho^2}$.

1. Calculer $\det(M)$, M^{-1}, puis exprimer la densité jointe $f_{(X,Y)}$ du vecteur (X, Y).
2. Montrer que

$$g_x(y) := \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y-\rho x)^2\right).$$

   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \to g_x(y)$ définit une densité.
3. Si on note Y_x une variable de densité g_x, que pouvez-vous dire sur la loi de Y_x ?

4. Trouver α, β deux réels tels que $(X, \alpha X + \beta Y)$ suit la loi normale centrée réduite.

Remarquer que l'on peut écrire $Y = -\frac{\alpha}{\beta}X + \frac{1}{\beta}(\alpha X + \beta Y)$. Sauriez-vous dire pourquoi cette écriture est intéressante ?

Exercice 9. Dans cet exercice, $Y_1, \dots, Y_n, \dots$ sont i.i.d. selon $\mathcal{N}(0, 1)$, X_0 est gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \tau^2)$, indépendante de $Y_1, \dots, Y_n, \dots$.

On définit $X_1, \dots, X_n, \dots$ par

$$X_{i+1} = \theta X_i + \sigma Y_{i+1}$$

On note $\mathcal{F}_i = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_i)$.

a. Calculer $\mathbb{E}[X_{i+1} \mid \mathcal{F}_i]$.
b. Calculer $\mathbb{E}X_i$, $\mathrm{Var}(X_i)$.
c. Peut-on choisir $\mu, \tau, \sigma, \theta$, pour que les X_i soient tous distribués identiquement ?
d. À quelle condition sur θ, les X_i convergent-elles en distribution ? Préciser la limite si possible.
e. Si θ satisfait la condition de la question précédente, calculer $\mathrm{cov}(X_i, X_{i+k})$, pour $i, k \in \mathbb{N}$