# TD IV : Espérance conditionnelle/Catactérisations

- 29 Septembre 2025-2 octobre 2025
- Master I ISIFAR
- **Probabilités**

**Conventions**

Dans les 3 exercices qui suivent, $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ constituent une famille indépendante de variables aléatoires identiquement distribuées à valeur dans $\{-1, 1\}$.
L'univers des possibles est $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$. Les $X_i$ sont les projections canoniques.
On note $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les $n$ premières coordonnées :

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$$

L'univers est muni de la tribu des cylindres $\mathcal{F} = \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{F}_n\right)$.
On note $\Delta$ une constante à valeur dans $(0, 1)$ (la *dérive* de la marche aléatoire).
On note $\mathbb{P}$ la loi produit infini, telle que pour tout $x \in \{-1, 1\}^n$

$$\mathbb{P}\left\{\bigwedge_{i=1}^n X_i = x_i\right\} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2}(1 + x_i\Delta)$$

On étudie la marche alétoire sur $\mathbb{Z}$ de dérive $\Delta$.
On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
L'indice $n$ représente le temps, $S_n$ la position à l'instant $n$.

**Exercice 1** (Marches aléatoires biaisées i)**.**

a. Quelle est la loi de $S_n$ ?
b. $S_n$ est-elle $\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n-1}, \mathcal{F}_{n+1}$ mesurable ?
c. Quelle est l'espérance de $S_n$ ?
d. Quelle est la variance de $S_n$ ?

**On admettra l'inégalité de Hoeffding :**

Si $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des variables aléatoires indépendantes telles que $a_i \leq Y_i \leq b_i$ (les $Y_i$ sont bornées), alors

$$P\{Z - \mathbb{E}Z \geq t\} \leq \mathrm{e}^{-2\frac{t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}}$$

avec $Z = \sum_{i=1}^n Y_i$.

**Exercice 2** (Marches aléatoires biaisées ii)**.**

Pour $0 \leq \tau \leq n\Delta$,

a. Majorer $\mathbb{P}\{S_n \leq \tau\}$ à l'aide de l'inégalité de Chebyshev
b. Majorer $\mathbb{P}\{S_n \leq \tau\}$ à l'aide de l'inégalité de Hoeffding
c. L'ensemble
$$E = \{\omega : \forall n, S_n(\omega) < \tau\}$$
appartient-il à la tribu $\mathcal{F}_m$ pour un $m$ donné ? est-il un événement de $\mathcal{F}$ ?
d. Si $E$ est un événement, quelle est sa probabilité ?

**Convention**

On suppose $\tau \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
On note $T = \inf\{n : S_n \geq \tau\}$. Si $\forall n, \quad S_n(\omega) < \tau$, alors $T(\omega) = \infty$.
On note $S_T$, la fonction définie par

$$S_T(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{T(\omega)=n} S_n(\omega) \qquad \text{si } T(\omega) < \infty$$

et $S_T(\omega) = 0$ si $T(\omega) = \infty$.

**Exercice 3** (Marches aléatoires biaisées iii)**.**

a. Pourquoi peut-on considérer que $T$ est une variable aléatoire (à valeur dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) ?
b. Quelle est la probabilité que $T = \infty$ ?
c. L'événement $\{T \leq n\}$ est-il $\mathcal{F}_{n-1}, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}$ mesurable ?
d. Pourquoi peut-on considérer que $S_T$ est une variable aléatoire ?
e. Quelle est l'espérance de $S_T$ ?
f. Montrer que $\mathbb{E}S_T = \Delta \mathbb{E}T$ En déduire $\mathbb{E}T$.

**Exercice 4** (Binomiale négative)**.** Les variables $X_1, ::: X_2, \ldots, X_n, \ldots$ sont des variables de Bernoulli de probabilité de succès $p \in (0,1)$, indépendantes. On définit $T_1 = \min\{i : X_i = 1\}$ (temps du premier succès), $T_2 = \min\{i : i > T_1, X_i = 1\}$ (temps du premier succès après $T_1$), et récursivement $T_{n+1} = \min\{i : i > T_n, X_i = 1\}$ (temps du $n+1$eme succès).

On admet l'existence d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ où $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}$ est une tribu pour laquelle les $X_i$ sont mesurables, et $P$ tel que $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ est une famille indépendante.

a. $T_1$ et plus généralement $T_n$ sont-elles des variables aléatoires ?
b. Calculer $P\{T_1 > k\}$ pour $k \in \mathbb{N}$.
c. Calculer $P\{T_1 = k\}$ pour $k \in \mathbb{N}$
d. Calculer $\mathbb{E}T_1$.
e. Calculer $P\{T_1 = k \wedge T_2 = k+j\}$ pour $k, j \in \mathbb{N}$
f. Calculer $P\{T_2 = k\}$ pour $k \in \mathbb{N}$
g. Calculer $\mathbb{E}T_2$
h. Calculer $\mathbb{E}T_n$

**Exercice 5** (Allocations aléatoires)**.**

On dispose de $n$ urnes numérotées de 1 à $n$ et de $n$ boules. Les boules sont réparties de manière uniforme dans les urnes (chaque boule se comporte de manière indépendante des autres et a probabilité $1/n$ de tomber dans chaque urne). On note $U_i$ la variable aléatoire désignant le nombre de boules qui tombent dans l'urne $i$. Dans la suite $\alpha > 1$ est un réel.

a. Déterminer la loi de $U_i$.
b. Montrer que l'on a :

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq n} U_i > \alpha \ln n) \leq n \mathbb{P}(U_1 > \alpha \ln n).$$

c. Calculer $\mathbb{E}(\exp(U_1))$.
d. Montrer que pour tout $\beta > -n$, on a $(1 + \beta/n)^n \leq \exp(\beta)$.
e. Montrer que $\mathbb{P}(U_1 > \alpha \ln n) \leq \frac{\exp(\exp(\alpha)-1)}{n^\alpha}$.
f. En déduire que si $\alpha > 1$, on a

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq n} U_i > \alpha \ln n) \to_{n \to \infty} 0.$$

**Exercice 6** (Restitution Organisée de Connaissances).

- Soient $A, B, C$ trois événements dans un espace probabilisé. A-t-on toujours : $A \perp\!\!\!\perp B$ et $B \perp\!\!\!\perp C \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp C$ ?
- Soient $P$ et $Q$ deux lois de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$, on définit l'ensemble $\mathcal{M} = \{A : A \in \mathcal{F}, P(A) = Q(A)\}$. Répondre par *vrai/faux/je ne sais pas* aux questions suivantes :

  a. $\mathcal{M}$ est-il toujours une classe monotone ?
  b. $\mathcal{M}$ est-il toujours une $\sigma$-algèbre ?
  c. $\mathcal{M}$ est-il toujours une $\pi$-classe ?

- Soient $G$ et $F$ sont deux fonctions génératrices de probabilité. Répondre par *vrai/faux* aux questions suivantes :

  a. Est-il vrai que $G \times F$ est toujours une fonction génératrice ?
  b. Est-il vrai que $G + F$ est toujours une fonction génératrice de probabilité ?
  c. Est-il vrai que $\lambda G + (1 - \lambda)F$ avec $\lambda \in [0, 1]$ est toujours une fonction génératrice de probabilité ?

- Si $\widehat{F}$ est la fonction caractéristique de la loi de $X$, et si $\epsilon \perp\!\!\!\perp X$, avec $P\{\epsilon = 1\} = P\{\epsilon = -1\} = 1/2$, quelle est la fonction caractéristique de la loi de $\epsilon X$ ?

**Exercice 7** (Distributions biaisées par la taille).

Si $X$ est une variable aléatoire positive intégrable, la version *biaisée par la taille* de $X$ est la variable aléatoire $X^*$ dont la loi $Q$ est absolument continue par rapport à celle de $X$ (notée $P$) et dont la densité (par rapport à celle de $X$) est proportionnelle à $X$ :

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}(x) = \frac{x}{\mathbb{E}X}\,.$$

a. Caractériser $X^*$ lorsque $X$ est une Bernoulli.
b. Caractériser $X^*$ lorsque $X$ est binomiale.
c. Caractériser $X^*$ lorsque $X$ est Poisson.
d. Caractériser $X^*$ lorsque $X$ est Gamma.
e. Si $X$ est à valeurs entières, exprimer la fonction génératrice de $X^*$ en fonction de celle de $X$.
f. Exprimer la transformée de Laplace de $X^*$ en fonction de celle de $X$.
g. Si $U$ est une transformée de Laplace, dérivable à droite en 0, $U'/U'(0)$ est-elle la transformée de Laplace d'une loi sur $[0, \infty)$ ?

**Exercice 8** (Amies des gaussiennes).

**Rappel**

La loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ admet pour densité $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$,

- Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, donner une densité de la loi de $Y = \exp(X)$ (Loi log-normale). Calculer l'espérance et la variance de $Y$.
- Même question si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Si $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, avec $X \perp\!\!\!\perp Y$, donner une densité de la loi de $Z = Y/X$ (Loi de Student à 1 degré de liberté)
- Si $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, avec $X \perp\!\!\!\perp Y$, donner une densité de la loi de $W = Y/\sqrt{X^2}$.
- Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $\epsilon$ vaut $\pm 1$ avec probabilité 1/2 (variable de Rademacher) avec $X \perp\!\!\!\perp \epsilon$, donner une densité de la loi de $Y = \epsilon X$. $Y$ et $X$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 9.**

**Exercice 10** (Principe de réflexion)**.**

Principe de réflexion

Dans cet exercice, $X_1, X_2, \ldots$ sont des variables de Rademacher indépendantes ($P\{X_i = \pm 1\} = \frac{1}{2}$), $S_n = \sum_{i=1}^n X_i, S_0 = 0$ et $M_n = \max_{k\leq n} S_n$.

Montrer que, pour $a > 0$,

$$P\{M_n > a\} \leq 2P\{S_n > a\}$$

**Statistique des rangs/Statistiques d'ordre**

Les statistiques d'ordre $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq X_{n:n}$ d'un $n$-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ d'observations indépendantes identiquement distribuées sont formées par le réarrangement croissant (convention) de l'échantillon.
Quand $n$ est clair d'après le contexte on peut les noter $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$.

**Exercice 11** (Statistiques d'ordre)**.**

a. Vérifier que la l:: : oi jointe des statistiques d'ordre est absolument continue par rapport à la loi de l'échantillon.
b. On suppose que $X$ est une variable aléatoire réelle, absolument continue, de densité continue. Montrer que l'échantillon est presque sûrement formé de valeurs deux à deux distinctes.
c. Donner la densité de la loi jointe des statistiques d'ordre.
d. Si la loi des $X_i$ définie par sa fonction de répartition $F$, admet une densité $f$, quelle est la densité de la loi de $X_{k:n}$ pour $1 \leq k \leq n$ ?
e. Montrer que conditionnellement à $X_{k:n} = x$, la suite

$$(X_{i:n} - X_{k:n})_{i=k+1,\ldots,n}$$

est distribuée comme les statistiques d'ordre d'un $n-k$ échantillon de la loi d'excès au dessus de $x$ (fonction de survie $\overline{F}(x+\cdot)/\overline{F}(x)$) avec la convention $\overline{F} = 1 - F$).

(Représentation de Rényi)

**Exercice 12** (Statistiques d'ordre d'un échantillon exponentiel)**.** Cet exercice reprend:: : les conventions de l'exercice précédent. On s'intéresse maintenant aux statistiques d'ordre d'un échantillon exponentiel.

a. Si $X_1, \ldots, X_n$ est un échantillon i.i.d. de la loi exponentielle d'espérance 1 (densité $\mathbb{I}_{x>0}\mathrm{e}^{-x}$), et $X_{n:n} \geq X_{n-1:n} \geq \ldots \geq X_{1:n}$ les statistiques d'ordre associées, montrer que :
b. avec la convention $X_{0:n} = 0$, les écarts $(X_{i:n} - X_{i-1:n})_{1\leq i\leq n}$ (*spacings*) forment une collection de variables aléatoires indépendantes ;
c. $X_{i:n} - X_{i-1:n}$ est distribuée selon une loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{i}$ .
d. Maintenant $(k_n)_n$ est une suite croissante d'entiers qui tend vers l'infini, telle que $k_n/n$ tend vers une limite finie (éventuellement nulle). Montrer que

$$\frac{X_{k_n:n} - \mathbb{E}X_{k_n:n}}{\sqrt{\mathrm{var}(X_{k_n:n})}}$$

converge en loi vers une Gaussienne centrée réduite.