TD III : Processus de branchement

- 18 Septembre 2025-25 Septembre 2025
- Master I ISIFAR
- **Probabilités**

Un processus de Galton-Watson (processus de branchement homogène) est un processus stochastique en temps discret utilisé pour modéliser l'évolution d'une population où chaque individu se reproduit indépendamment des autres, suivant une même loi de probabilité donnée (appelée *loi de reproduction*).

Il a été introduit au XIX siècle par Francis Galton et Henry Watson our étudier la probabilité d'extinction des noms de famille (nobles). On commence avec une *génération initiale* (génération 0) formée d'un individu. Chaque individu de la génération n engendre un nombre aléatoire de descendants distribué selon la loi de reproduction. Les descendants forment la génération suivante $(n+1)$. Les nombres de descendants des individus de la géneration n forment une famille indépendante. Le nombre d'individus dans la génération n est noté Z_n.

La question centrale (et angoissante) est : la population s'éteint-elle presque sûrement $(Z_n \to 0)$ ou bien survit-elle avec une probabilité non nulle ?

On note Q la *loi de reproduction* (loi sur $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$. On note μ son espérance. On note G_Q la fonction génératrice des probabilités de la loi Q.
On convient de $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 1 (Branchement (Modélisation))**.**

Proposer une formalisation, c'est à dire un univers Ω, une tribu $\mathcal{F}$ de parties de Ω, et une loi de probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ sur lesquels on peut définir la collection de variables aléatoires $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n, \ldots$. Préciser la loi conditionnelle de Z_{n+1} sachant $\{Z_n = k\}, k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 (Branchement, Espérance conditionnelle)**.**

Calculer l'espérance conditionnelle de Z_{n+1} sachant $\sigma(Z_n)$

Exercice 3 (Branchement. Espérance taille des générations)**.**

Calculer $\mathbb{E}Z_n$ en fonction de μ et n.

Convention

Selon la valeur de μ (espérance de la loi de reproduction), on distingue trois cas :
- $\mu < 1$, cas sous-critique
- $\mu = 1$, cas critique
- $\mu > 1$, cas sur-critique

Dans tous les cas, on note p_E la probabilité d'extinction (probabilité de l'événement $\cup_{n\in\mathbb{N}}\{Z_n = 0\}$).

Exercice 4 (Branchement. Cas sous-critique)**.**

Cacluler p_E, la probabilité d'extinction dans le cas sous-critique.

Exercice 5 (Branchement. Cas sûr-critique)**.**

Montrer que dans tous les cas, p_E est solution de l'équation $G_Q(x) = x$.

Exercice 6 (Branchement. Cas sur-critique I)**.**

Étudier les solutions de l'équation $x = G_Q(x)$.

Exercice 7 (Branchement. Cas sur-critique II)**.**

Déterminer p_E dans le cas sur-critique.