TD II : Espérances et lois conditionnelles

22 Septembre 2025-26 Septembre 2025
- Master I Isifar
- **Probabilités**

Exercice 1 (Espérance conditionnelle/tribu atomique)**.**

Cours

Espérance conditionnelle par rapport à une tribu engendrée par une partition dénombrable.

1. Soit $(A_n, n \in \mathbb{N}^*)$ une partition de Ω et $\mathcal{F} = \sigma(A_n, n \geq 1)$ la tribu engendrée par les $A_n, n \geq 1$. Rappelons qu'une v.a.r. Y est $\mathcal{F}$-mesurable si et seulement si il existe une suite de réls (a_n) telle que $Y = \sum_{n\geq 1} a_n \mathbf{1}_{A_n}$. Exprimer $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$.
2. Soient X, Y deux variables i.i.d. $\sim \mathrm{Ber}(p)$. On considère $\mathcal{G} = \sigma(\{X + Y = 0\})$. Calculer $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}], \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$. Les variables obtenues sont-elles toujours indépendantes ?

Solution

1. Nécessairement $Y := \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ est $\mathcal{F}$-mesurable et donc on peut le chercher sous la forme $\sum_{n\geq 1} a_n \mathbb{1}_{A_n}$.

Comme $A_n \in \mathcal{F}$ on doit nécessairement avoir de plus

$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{A_n}] = \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_{A_n}] = a_n\mathbb{P}(A_n),$$

car $(A_n, n \geq 1)$ est une partition de Ω. On déduit que

$$a_n = \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{A_n}]}{\mathbb{P}(A_n)},\ n \geq 1.$$

et donc

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = \sum_{n\geq 1} \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{A_n}]}{\mathbb{P}(A_n)}\mathbb{1}_{A_n}.$$

1. On a $\mathcal{G} = \{\emptyset, \{X = Y = 0\}, \{X = 1\} \cup \{Y = 1\}, \Omega\}$, et on est dans la situation précédente avec une partition à deux éléments non dégénérés $A_1 = \{X = Y = 0\}, A_2 = A_1^c = \{X = 1\} \cup \{Y = 1\}$.

On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] &= \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{A_1}]}{\mathbb{P}(A_1)}\mathbb{1}_{A_1} + \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{A_2}]}{\mathbb{P}(A_2)}\mathbb{1}_{A_2} \\ &= \frac{2}{3}\mathbb{1}_{A_2}\end{aligned}$$

en utilisant que $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{A_1}] = 0, \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{A_2}] = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(A_2) = \frac{3}{4}$.
Par le même raisonnement (X et Y jouent des rôles symétriques)

$$\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}] = \frac{2}{3}\mathbb{1}_{A_2}$$

On obtient que $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}] = \frac{2}{3}\mathbb{1}_{A_2}$, ces variables ne sont clairement pas indépendantes.

Exercice 2 (Conditionnement continu)**.**

Soient (X, Y) un couple de v.a. réelles intégrables de densité jointe f, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ borélienne telle que $g(X, Y) \in \mathbb{L}^1$.

Rappeler l'expression de ϕ, ψ telles que

$$\mathbb{E}[g(X, Y) \mid Y] = \phi(Y), \quad \mathbb{E}[g(X, Y)|X] = \psi(X).$$

1. On considère (X, Y) de densité jointe $f(x, y) = \frac{1}{x}\mathbf{1}_{\{0\leq y\leq x\leq 1\}}$. Quelle est la loi de X ? Calculer la distribution conditionnelle $f_{Y|X}$ de Y sachant X. Calculer $\mathbb{P}(X^2+Y^2 \leq 1|X)$, puis en déduire $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq 1)$.
   Pour simplifier l'expression obtenue on pourra utiliser que $x \to \sqrt{1-x^2} - \tanh^{-1}(\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{1-x^2}) + \frac{1}{2}\ln(1-\sqrt{1-x^2})$ est une primitive de $x \to \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.
2. Dans le cas général, montrer que $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Y]$. Que vaut $\mathbb{E}[Y]$ dans l'exemple de la question précédente ?
3. Montrer, dans le cas général, que

   $$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]g(X)] = \mathbb{E}[Y g(X)],$$

   pour toute fonction g telle que les deux espérances sont définies. Que vaut $\mathbb{E}[Y g(X) \mid X]$?

Solution

Lorsque (X, Y) a densité jointe f, rappelons que si on pose

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_X(x)} & \text{si } f_X(x) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad f_{X|Y}(x \mid y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} & \text{si } f_Y(y) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$\phi(y) = \int_{\mathbb{R}} g(x, y) f_{X|Y}(x \mid y)dx \quad \psi(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x, y) f_{Y|X}(y \mid x)dy,$$

alors

$$\mathbb{E}[g(X, Y) \mid Y] = \phi(Y), \qquad \mathbb{E}[g(X, Y) \mid X] = \psi(X).$$

Montrons par exemple la deuxième assertion : si $A \in \sigma(X)$, i.e. il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $A = X^{-1}(B)$, et $\mathbb{1}_A(\omega) = \mathbb{1}_B(X(\omega))$, de sorte que (l'usage de Fubini à la troisième ligne ci-dessous est justifié car $(x, y) \to |g(x, y)|\mathbb{1}_B(x)$ est $\mathbb{P}_{(X,Y)}$-intégrable puisque $(x, y) \to |g(x, y)|$ l'est) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X, Y)\mathbb{1}_A] &= \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y)\mathbb{1}_B(x)f(x, y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y)f_{Y|X}(y \mid x)f_X(x)\mathbb{1}_B(x)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x, y)f_{Y|X}(y \mid x) \right) \mathbb{1}_B(x)f_X(x)dx \\
&= \mathbb{E}[\psi(X)\mathbb{1}_B(X)] = \mathbb{E}[\psi(X)\mathbb{1}_A]
\end{aligned}$$

comme souhaité.

Solution (suite)

1. X a densité a pour f_X avec f_X nulle en dehors de $[0,1]$ et

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy = \frac{1}{x}\int_0^x dy = 1, 0 \leq x \leq 1,$$

on déduit que $X \sim \text{Unif}[0,1]$.
Par ailleurs

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{1}{x}\mathbb{1}_{\{0\leq y\leq x\}}.$$

Remarque : Cela signifie que sachant X, $Y \sim \text{Unif}[0,X]$.
On en déduit

$$\mathbb{P}(X^2+Y^2 \leq 1 \mid X) = \mathbb{P}(Y^2 \leq 1 - X^2 \mid X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{1-X^2}}{X} & \text{sinon.} \end{cases}.$$

On a alors, puisque $X \sim \text{Unif}[0,1]$, et en utilisant l'indication

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X^2+Y^2 \leq 1) = \mathbb{E}[\mathbb{P}(X^2+Y^2 \leq 1 \mid X)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} + \left[\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{1-x^2}) + \frac{1}{2}\ln(1-\sqrt{1-x^2})\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \ln(\sqrt{2}+1).
\end{aligned}$$

Solution (suite)

1. Comme Y est intégrable on peut appliquer Fubini à la troisième ligne ci-dessous et se servir du fait que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f_X(x)f_{Y|X}(y \mid x) = f(x,y)$ pour voir que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid X]] = \mathbb{E}[\psi(X)] &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x)f_X(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} yf_{Y|X}(y \mid x)dyf_X(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} yf(x,y)dxdy = \mathbb{E}[Y]
\end{aligned}$$

Dans l'exemple précédent on a $\mathbb{E}[Y \mid X] = \frac{X}{2}$ et donc

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid X]] = \frac{\mathbb{E}[X]}{2} = \frac{1}{4}.$$

1. On peut appliquer Fubini à la troisième ligne ci-dessous car $\mathbb{E}[|Yg(X)|] < \infty$, et se servir du fait que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f_X(x)f_{Y|X}(y \mid x) = f(x,y)$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid X]g(X)] = \mathbb{E}[\psi(X)g(X)] = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)g(x)f_X(x)dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y \mid x)dy g(x)f_X(x)dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} y g(x)f(x,y)dxdy = \mathbb{E}[Yg(X)]$$

Pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, quitte à considérer la fonction $\hat{g} = g\mathbb{1}_B$, on déduit

$$\mathbb{E}[Yg(X)\mathbb{1}_B(X)] = \mathbb{E}[\psi(X)g(X)\mathbb{1}_B]$$

de sorte que

$$\mathbb{E}[Yg(X) \mid X] = g(X)\mathbb{E}[Y \mid X] = g(X)\psi(X)$$

Exercice 3 (Partiel passé)**.**

Partiel passé

Soient $0 \leq r \leq p \leq 1$ tels que $1 - 2p + r \geq 0$.
Soient X_1, X_2 tels que

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = r, \quad \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = p - r,$$
$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = p - r, \quad \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = 1 - 2p + r.$$

1. Quelle est la loi de X_1 ? celle de X_2 ?
2. Calculer $Y = \mathbb{E}[X_1 \mid X_2]$ et vérifier que

$$Y = \begin{cases} \frac{p-r}{1-p} \text{ avec probabilité } 1-p \\ \frac{r}{p} \text{ avec probabilité } p. \end{cases}$$

3. Rappelons que par définition $\mathrm{Var}[X_1 \mid X_2] = \mathbb{E}[X_1^2 \mid X_2] - \mathbb{E}[X_1 \mid X_2]^2$. Montrer que

$$\mathrm{Var}[X_1 \mid X_2] = \left(\frac{p-r}{1-p} - \left(\frac{p-r}{1-p}\right)^2\right)\mathbf{1}_{\{X_2=0\}} + \left(\frac{r}{p} - \left(\frac{r}{p}\right)^2\right)\mathbf{1}_{\{X_2=1\}}.$$

4. Que vaut $\mathrm{Var}(\mathbb{E}[X_1 \mid X_2])$? $\mathbb{E}[\mathrm{Var}[X_1 \mid X_2]]$? Vérifier qu'on a bien

$$\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(\mathbb{E}[X_1 \mid X_2]) + \mathbb{E}[\mathrm{Var}[X_1 \mid X_2]].$$

Solution

1. X_1, comme X_2, prend ses valeurs dans $\{0,1\}$. On a $\mathbb{P}(X_1 = 1) = r + p - r$ de sorte que $X_1 \sim \mathrm{Ber}(p)$, et $\mathbb{P}(X_2 = 1) = r + p - r$ de sorte qu'également $X_2 \sim \mathrm{Ber}(p)$.
2. On a (cf EF3)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_1 \mid X_2] &= \frac{\mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_{\{X_2=1\}}]}{\mathbb{P}(X_2=1)} \mathbb{1}_{\{X_2=1\}} + \frac{\mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_{\{X_2=0\}}]}{\mathbb{P}(X_2=0)} \mathbb{1}_{\{X_2=0\}} \\ &= \frac{r}{p} \mathbb{1}_{\{X_2=1\}} + \frac{p-r}{1-p} \mathbb{1}_{\{X_2=0\}}\end{aligned}$$

Remarquons que $\mathbb{P}(Y = \frac{r}{p}) = \mathbb{P}(X_2 = 1) = p, \mathbb{P}(Y = \frac{p-r}{1-p}) = \mathbb{P}(X_2 = 0) = 1-p$. Autrement dit Y est une variable qui prend deux valeurs, $\frac{r}{p}$ sur l'événement $\{X_2 = 1\}$ (qui est bien de probabilité p) et $\frac{p-r}{1-p}$ sur l'événement complémentaire (qui est bien de probabilité $1-p$).

1. On a p.s. $X_1^2 = X_1$ puisque X_1 prend ses valeurs dans $\{0,1\}$ et donc $\mathbb{E}[X_1^2 \mid X_2] = \mathbb{E}[X_1 \mid X_2]$. Par ailleurs un rapide calcul assure que

$$\mathbb{E}[X_1 \mid X_2]^2 = \frac{r^2}{p^2} \mathbb{1}_{\{X_2=1\}} + \frac{(p-r)^2}{(1-p)^2} \mathbb{1}_{\{X_2=0\}},$$

et on obtient donc la formule souhaitée.

Solution (suite)

1. D'après la question 2, $Y = c + \left|\frac{r}{p} - \frac{p-r}{1-p}\right| \xi$, où $\xi \sim \mathrm{Ber}(p)$. On obtient donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) = \left(\frac{r}{p} - \frac{p-r}{1-p}\right)^2 p(1-p) \qquad &= \frac{r^2(1-p)}{p} + \frac{p(p-r)^2}{1-p} - 2r(p-r) \\ &= \frac{r^2}{p} - r^2 + \frac{(p-r)^2}{1-p} - (p-r)^2 - 2r(p-r) \\ &= \frac{r^2}{p} + \frac{(p-r)^2}{1-p} - (r + (p-r))^2\end{aligned}$$

Par ailleurs d'après la question 3,

$$\mathbb{E}[\mathrm{Var}[X_1 \mid X_2]]) = \left(\frac{p-r}{-}\frac{(p-r)^2}{1-p}\right) + \left(r - \frac{r^2}{p}\right) = p - \frac{(p-r)^2}{1-p} - \frac{r^2}{p}.$$

On a donc

$$\mathrm{Var}(Y) + \mathbb{E}[\mathrm{Var}[X_1 \mid X_2]] = p - p^2 = \mathrm{Var}[X_1].$$

Exercice 4 (Conditionnement)**.**

Soit (X_n) une suite de v.a. .i.i.d intégrables, et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Que valent $\mathbb{E}[X_1 \mid X_2], \mathbb{E}[S_n \mid X_1], \mathbb{E}[S_n \mid S_{n-1}]$?
2. Montrer que si les paires de variables (X,Z), (Y,Z) ont la même loi jointe, alors pour toute fonction réelle positive (ou satisfaisant une condition d'intégrabilité), $\mathbb{E}[f(X) \mid Z] = \mathbb{E}[f(Y) \mid Z]$. En déduire $\mathbb{E}[X_1 \mid S_n]$.

Solution

1. Puisque X_1 est indépendant de X_2 on a (EF2)

$$\mathbb{E}[X_1 \mid X_2] = \mathbb{E}[X_1].$$

De même pour $i \geq 2$ $\mathbb{E}[X_i \mid X_1] = \mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_1]$, tandis que (EF1) : $\mathbb{E}[X_1 \mid X_1] = X_1$. On conclut en faisant usage de la linéarité de $\mathbb{E}[\cdot \mid \cdot]$ que

$$\mathbb{E}[S_n \mid X_1] = X_1 + (n-1)\mathbb{E}[X_1].$$

Par un raisonnement similaire, $\mathbb{E}[S_{n-1} \mid S_{n-1}] = S_{n-1}$, tandis que X_n étant indépendant de S_{n-1} on a $\mathbb{E}[X_n \mid S_{n-1}] = \mathbb{E}[X_1]$. En utilisant que $S_n = S_{n-1} + X_n$, la linéarité de $\mathbb{E}[\cdot \mid \cdot]$ permet de conclure que

$$\mathbb{E}[S_n \mid S_{n-1}] = S_{n-1} + \mathbb{E}[X_1].$$

2. Supposons que $\mathbb{P}_{(X,Z)} = \mathbb{P}_{(Y,Z)}$, et que $X \in \mathbb{L}^1$, notons $T = \mathbb{E}[X \mid Z]$ (qui est, par définition, $\sigma(Z)$-mesurable). Soit $A \in \sigma(Z)$, de sorte que $A = Z^{-1}(B)$ pour un B dans la tribu dont on a muni l'espace dans lequel Z prend ses valeurs. Alors

$$\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_B(Z)] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_B(Z)] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[T\mathbb{1}_A],$$

donc $T = \mathbb{E}[Y \mid Z]$.

Solution (suite)

On peut faire le même raisonement avec $f(X), f(Y)$, ou simplement remarquer que $\mathbb{P}_{(X,Z)} = \mathbb{P}_{(Y,Z)} \Rightarrow \mathbb{P}_{(f(X),Z)} = \mathbb{P}_{(f(Y),Z)}$.
Comme les $X_i, 1 \leq i \leq n$ jouent des rôles parfaitement symétriques dans S_n puisqu'elles sont i.i.d, on a $\mathbb{P}_{(X_i,S_n)} = \mathbb{P}_{(X_1,S_n)}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On déduit de ce qui précède que $\mathbb{E}[X_1 \mid S_n] = \mathbb{E}[X_i \mid S_n], 1 \leq i \leq n$. Mais alors par linéarité

$$S_n = \mathbb{E}[S_n \mid S_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i \mid S_n] = n\mathbb{E}[X_1 \mid S_n],$$

et on conclut que $\mathbb{E}[X_1 \mid S_n] = \frac{S_n}{n}$.

Exercice 5 (Examen passé)**.**

(Examen passé)

Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de variables i.i.d, avec $X_1 \sim \mathrm{Ber}(1/2)$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n (X_i - 1/2)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$.

Calculer $\mathbb{E}[S_n \mid \mathcal{F}_5]$ en fonction de n. Quelle est la loi de cette variable aléatoire ?

Solution

Si $n \leq 5$, S_5 est $\mathcal{F}_5$ mesurable et donc (EF1) ;

$$\mathbb{E}[S_n \mid \mathcal{F}_5] = S_n \quad \forall n \leq 5$$

. Comme dans l'exercice précédent, puisque X_i est indépendant de $\mathcal{F}_5$ pour tout $i \geq 6$, on a

$$\mathbb{E}[(X_i - 1/2) \mid \mathcal{F}_5] = \mathbb{E}[X_i - 1/2] = 0.$$

Donc

$$\mathbb{E}[S_n \mid \mathcal{F}_5] = S_5 \quad \forall n \geq 5.$$

Enfin $S_k + \frac{k}{2} \sim \mathrm{Bin}(k, 1/2)$.

Exercice 6 (Partiel passé).

Soient $\{\mathbf{e}_i, i \in \mathbb{N}\}$ des variables i.i.d exponentielles de paramètre 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $S_n := \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i$.

1. On note f_n la fonction de densité de la variable S_n. Montrer que pour tout $t \geq 0$

$$f_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\exp(-t).$$

2. Pour $t > 0, n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $\mathbb{P}(S_n \leq t)$?
3. On fixe $t > 0$ et on suppose $X_t \sim \mathrm{Poisson}(t)$. Que vaut $\mathbb{P}(X_t \geq n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$?
4. Sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$ on place les points $S_1, S_2, S_3, ...$ On note N_t le nombre de ces points qui tombent dans l'intervalle $[0, t]$. Exprimer l'événement $\{N_t \geq n\} = \{S_n \leq t\}$. Déterminer la loi de N_t à l'aide des questions préc'dentes.

5. Montrer que, conditionnellement à $\{N_t = 1\}$, la loi de $\mathbf{e}_1$ est uniforme sur $[0, t]$.
6. Conditionnellement à $\{N_t = 2\}$, quelle est la loi du vecteur $(\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2)$?

Solution

1. On montre l'assertion souhaitée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. L'assertion est trivialement vérifiée pour $n = 1$ puisqu'on reconna$\hat{\imath}$t en f_1 la densité d'une exp(1) et donc de $S_1 = \mathbf{e}_1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que S_n a densité f_n, comme $(S_n, \mathbf{e}_{n+1})$ sont indépendantes, le couple a densité

$$g(s,t) = f_n(s)\exp(-t)\mathbb{1}_{s\geq 0, t\geq 0}$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi(S_{n+1})] &= \mathbb{E}[\phi(S_n + \mathbf{e}_{n+1})] \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \phi(s+t)\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\exp(-s-t)dsdt\end{aligned}$$

Avec $(u, v) = (s + t, t)$ on a un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^2$ dans $\{(u, v) \in \mathbb{R}_+^2 : v \leq u\}$, de jacobien 1, et donc par changement de variables, on obtient comme souhaité :

$$\mathbb{E}[\phi(S_{n+1}] = \int_{\mathbb{R}_+} du\phi(u)\exp(-u)\left(\int_0^u \frac{(u-v)^{n-1}}{(n-1)!}dv\right) = \int_{\mathbb{R}_+}\phi(u)f_{n+1}(u)du$$

Remarque : Avec des exponentielles indépendantes de paramètre commun λ, on obtient la densité d'une $\Gamma(n, \lambda)$ pour la somme, ici on est dans le cas $\lambda = 1$.

Solution (suite)

1. On a

$$\mathbb{P}(S_n \geq t) = \int_t^\infty f_n(u)du$$

Cette intégrale se calcule, en fonction de n, t, au moyen d'intégrations par parties successives :

$$\int_t^\infty f_n(u)du = \left[\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\right]_t^\infty + \int_t^\infty f_{n-1}(u)du.$$

Comme $\int_t^\infty f_1(u)du = \exp(-t)$, une récurrence immédiate fournit donc que

$$\int_t^\infty f_n(u)du = \exp(-t)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(X_t \geq n) = \exp(-t)\sum_{k\geq n}\frac{t^k}{k!}$$

et on remarque d'après la question précédente que ceci vaut précisément $1-\mathbb{P}(S_n \geq t) = \mathbb{P}(S_n \leq t)$ (pour la dernière égalité on a utilisé que S_n possède une densité pour assurer que $\mathbb{P}(S_n = t) = 0$).

Solution (suite)

1. Par définition $N_t \geq n$ ssi au moins n points parmi $\{S_1, S_2, \dots, S_n, \dots\}$ tombent dans l'intervalle $[0, t]$. Comme $(S_k, k \geq 0)$ est p.s. croissante ceci se produit (p.s.) lorsque $S_n \leq t$ et on on déduit que

$$\{N_t \geq n\} = \{S_n \leq t\}$$

La variable N_t est à valeurs dans $\mathbb{N}$, et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ (cf la question précédente pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a ajouté la cas trivial $n = 0$),

$$\mathbb{P}(N_t \geq n) = \mathbb{P}(X_t \geq n).$$

Mais ces valeurs caractérisent la fonction de répartition de N_t, et donc la loi de N_t, et on conclut que $N_t \sim \text{Poisson}(t)$.

Solution (suite)

1. On a $\{N_t = 1\} = \{\mathbf{e}_1 \leq t, \mathbf{e}_2 > t - \mathbf{e}_1\}$.
Par ailleurs, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ sont indépendantes et possèdent donc la densité jointe

$$f_{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)}(u, v) = \exp(-u)\exp(-v)\mathbb{1}_{\{u\geq 0\}}\mathbb{1}_{\{v\geq 0\}}$$

Pour $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ borélienne, on en déduit que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(\mathbf{e}_1) \mid N_t = 1] &= \frac{\mathbb{E}[\phi(\mathbf{e}_1)\mathbb{1}_{\{N_t=1\}}]}{\mathbb{P}(N_t = 1)} \\
&= \frac{\mathbb{E}[\phi(\mathbf{e}_1)\mathbb{1}_{\{\mathbf{e}_1 \leq t, \mathbf{e}_2 > t - \mathbf{e}_1\}}]}{t\exp(-t)} \\
&= \frac{\exp(t)}{t}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \phi(u)\exp(-u)\exp(-v)\mathbb{1}_{\{0\leq u \leq t\}}\mathbb{1}_{\{0 \leq t-u < v\}} dudv \\
&= \frac{\exp(t)}{t}\int_{\mathbb{R}} du\phi(u)\exp(-u)\mathbb{1}_{[0,t]}(u)\int_{t-u}^{\infty}\exp(-v)dv \\
&= \frac{\exp(t)}{t}\int_{\mathbb{R}} du\phi(u)\exp(-u)\mathbb{1}_{[0,t]}(u)\exp(u-t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(u)\frac{\mathbb{1}_{[0,t]}(u)}{t}du,
\end{aligned}
$$

où on a utilisé Fubini-Tonelli à la troisième ligne ci-dessus.
On conclut, gr^ace au théorème de caractérisation habituel, que la loi conditionnelle de $\mathbf{e}_1$ sachant $\{N_t = 1\}$ est Unif$[0, t]$,

1. On effectue un raisonnement similaire à celui de la question qui précède.

On a

$$
\{N_t = 2\} = \{S_1 \leq t, \mathbf{e}_3 > t - S_1\} = \{\mathbf{e}_1 \leq t, \mathbf{e}_2 \leq t - \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 > t - (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)\}.
$$

Par ailleurs, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ sont indépendantes et possèdent donc la densité jointe

$$
f_{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)}(u, v, w) = \exp(-u)\exp(-v)\exp(-w)\mathbb{1}_{\{u\geq 0\}}\mathbb{1}_{\{v \geq 0\}}\mathbb{1}_{\{w\geq 0\}}.
$$

Pour $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ borélienne, on en déduit que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \mid N_t = 2] &= \frac{\mathbb{E}[\phi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\mathbb{1}_{\{N_t=2\}}]}{\mathbb{P}(N_t = 2)} \\
&= \frac{\mathbb{E}[\phi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\mathbb{1}_{\{\mathbf{e}_1\leq t, \mathbf{e}_2 \leq t-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 > t-(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)\}}]}{\frac{t^2}{2}\exp(-t)} \\
&= \frac{2\exp(t)}{t^2}\int_{\mathbb{R}^3}\phi(u, v)\exp(-u-v)\exp(-w)\mathbb{1}_{\{0\leq u \leq u+v\leq t\}}\mathbb{1}_{\{w > t-(u+v)\}}dudvdw \\
&= \frac{2\exp(t)}{t^2}\int_{\mathbb{R}^2} dudv\phi(u, v)\exp(-u-v)\mathbb{1}_{\{0\leq u\leq u+v\leq t\}}\int_{t-(u+v)}^{\infty}\exp(-w)dw \\
&= \frac{2\exp(t)}{t^2}\int_{\mathbb{R}} du\phi(u)\exp(-u-v)\mathbb{1}_{\{0\leq u \leq u+v\leq t\}}\exp(u+v-t) = \int_{\mathbb{R}}\phi(u, v)\frac{2\mathbb{1}_{\{0\leq u\leq}}{t^2}
\end{aligned}
$$

et on conclut que la loi conditionnelle de $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ sachant $\{N_t = 2\}$ a pour densité $\frac{2\mathbb{1}_{\{u\geq 0\}}\mathbb{1}_{\{v\geq 0\}}\mathbb{1}_{\{u+v\leq t\}}}{t^2}$.
Autrement dit, la loi conditionnelle de $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ sachant $\{N_t = 2\}$ est uniforme sur le triangle $\{(u, v) \in [0, t]^2 : u + v \leq t\}$.

Exercice 7 (CC2 2023)**.**

On considère

$$X \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & -1\\1 & 2 & -1 & 0\\-1 & -1 & 3 & -1\\-1 & 0 & -1 & 5\end{pmatrix}\right).$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X_3 \mid X_4]$, et déterminer la loi conditionnelle de X_3 sachant X_4.
2. On pose $A = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-1 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$. Calculer BA^{-1}, puis vérifier que

$$BA^{-1}B^T = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

3. Déterminer $\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix}X_3\\X_4\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\right]$. et la loi conditionnelle de $\begin{pmatrix}X_3\\X_4\end{pmatrix}$ sachant $\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$.

Solution

1. D'après l'énoncé $\begin{pmatrix}X_3\\X_4\end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & -1\\-1 & 5\end{pmatrix}\right)$, et donc d'après la formule du cours, sachant X_4, $X_3 \sim \mathcal{N}\left(1 - \frac{X_4}{5}, \frac{14}{5}\right)$. En particulier $\mathbb{E}[X_3 \mid X_4] = 1 - \frac{X_4}{5}$.
2. On a $A^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$, et donc

$$BA^{-1} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

et

$$BA^{-1}B^T = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

comme souhaité.

Solution (suite)

1. D'après le cours, sachant $\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$, la loi conditionnelle de $\begin{pmatrix}X_3\\X_4\end{pmatrix}$ est gaussienne, centrée en

$$\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix}X_3\\X_4\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\right] = BA^{-1}\begin{pmatrix}X_1+1\\X_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} - \frac{1}{3}X_1 - \frac{1}{3}X_2\\-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2\end{pmatrix},$$

et de matrice de covariances

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\-1 & 5\end{pmatrix} - BA^{-1}B^T = \begin{pmatrix}\frac{7}{3} & \frac{-4}{3}\\\frac{-4}{3} & \frac{13}{3}\end{pmatrix}.$$

Exercice 8 (Partiel passé)**.**

Soit $(X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N}(\mu, M)$ où

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la loi du couple (X_1, X_2) ?
2. Déterminer α un réel tel que $Y = X_1 + X_2 $ est indépendante de X_1. Que vaut $\mathbb{E}[Y]$? $\mathrm{Var}(Y)$?
3. En déduire $\mathbb{E}[X_2 \mid X_1]$. Quelle est la loi conditionnelle de X_2 sachant X_1 ?
4. Déterminer un réel β tels que $Z = \beta X_1 + X_3$ est indépendante de X_1. En déduire

$$\mathbb{E}[X_3 \mid X_1], \quad \mathbb{E}[X_3^2 \mid X_1].$$

5. Calculer $\mathbb{E}\left[X_1^2 X_2 + X_3^2 X_1 \mid X_1\right]$.

Solution

1. (X_1, X_2) est un vecteur gaussien (comme image d'un vecteur gaussien par une application linéaire, en l'occurrence une projection), et on lit directement sur μ, M moyennes et covariances. On a donc $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(m, A)$, avec $m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, (X_1, Y) est un vecteur gaussien comme image du vecteur gaussien (X_1, X_2) par l'application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

Par théorème caractérisant l'indépendance des coordonnées d'un vecteur gaussien, X_1 est indépendant de Y ssi $\mathrm{Cov}(X_1, Y) = 0$. Or

$$\mathrm{Cov}(X_1, Y) = \alpha \mathrm{Var}[X_1] + 1 = 2\alpha + 1,$$

et donc on a l'indépendance souhaitée lorsque $\alpha = -\frac{1}{2}$. 1. Puisque $-\frac{1}{2}X_1 + X_2$ est indépendant de X_1 on a donc 2.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_2 \mid X_1] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}X_1 + \left(-\frac{1}{2}X_1 + X_2\right) \mid X_1\right] \\ &= \frac{1}{2}X_1 + \mathbb{E}\left[-\frac{1}{2}X_1 + X_2\right] = \frac{1}{2}X_1 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\mathrm{Var}\left(-\frac{1}{2}X_1 + X_2\right) = \frac{1}{4}\mathrm{Var}(X_1) - \mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \mathrm{Var}(X_2) = \frac{3}{2}$ et donc $-\frac{1}{2}X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. L'écriture $X_2 = \frac{1}{2}X_1 + \left(-\frac{1}{2}X_1 + X_2\right)$ permet donc d'affirmer que sachant X_1, la loi conditionnelle de X_2 est $\mathcal{N}\left(\frac{1}{2}X_1 - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Solution (suite)

1. Ici $\mathrm{Cov}(X_1, X_3) = 0$ et donc X_1 et X_3 sont indépendants, il suffit donc de prendre $\beta = 0$. On trouve donc ici que

$$\mathbb{E}[X_3 \mid X_1] = \mathbb{E}[X_3] = -1$$

et que sachant X_1, la loi conditionnelle de X_3 reste la loi de X_3, i.e. $\mathcal{N}(-1, 2)$. Par ailleurs

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_3^2 \mid X_1] &= \mathbb{E}[X_3^2] = \mathbb{E}[X_3]^2 + \mathrm{Var}[X_3] \\ &= 1 + 2 = 3.\end{aligned}$$

1. On a, en utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle et les question précédentes, puis en simplifiant

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_1^2 X_2 + X_3^2 X_1 \mid X_1] &= X_1^2 \mathbb{E}[X_2 \mid X_1] + X_1 \mathbb{E}[X_3^2 \mid X_1] \\ &= X_1^2 \left(\frac{1}{2}X_1 - \frac{1}{2}\right) + 3X_1 \\ &= \frac{1}{2}X_1^3 - \frac{1}{2}X_1^2 + 3X_1\end{aligned}$$

Exercice 9 (Examen passé)**.**

Soit $(X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N}(\mu, M)$, où

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\mathbb{E}[X_1 + 2X_2 \mid X_3]$. Quelle est la loi conditionnelle de $X_1 + 2X_2$ sachant X_3 ?

Solution

Comme dans l'exercice précédent on peut commencer par chercher α tel que $Y = \alpha X_3 + X_1 + 2X_2$ est indépendant de X_3. Bien s^ur, (Y, X_3) est un vecteur gaussien puisque c'est l'image de (X_1, X_2, X_3) par une application linéaire. Donc on a l'indépendance voulue lorsque $\mathrm{Cov}(Y, X_3) = 0$, i.e. lorsque

$$0 = \alpha \mathrm{Var}(X_3) + \mathrm{Cov}(X_1, X_3) + 2\mathrm{Cov}(X_2, X_3) = 3\alpha + 2 + 2,$$

et donc il faut prendre $\alpha = -\frac{4}{3}$.
On a alors

$$\mathbb{E}[X_1 + 2X_2 \mid X_3] = \frac{4}{3}X_3 + \mathbb{E}[-\frac{4}{3}X_3 + X_1 + 2X_2] = \frac{4}{3}X_3 + 2.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= \frac{16}{9}\mathrm{Var}(X_3) + \mathrm{Var}(X_1) + 4\mathrm{Var}(X_2) - \frac{8}{3}\mathrm{Cov}(X_3, X_1) - \frac{16}{3}\mathrm{Cov}(X_2, X_3) + 4\mathrm{Cov}(X_1, X_2) \\ &= \frac{16}{3} + 1 + 4 - \frac{16}{3} - \frac{16}{3} + 2 = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

et on déduit que sachant X_3, la loi conditionnelle de $X_1 + 2X_2$ est $\mathcal{N}\left(\frac{4}{3}X_3 + 2, \frac{5}{3}\right)$.

Solution (suite)

Alternativement, on peut utiliser les formules du cours. D'abord, avec $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} X_1 + 2X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(K \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, KMK^T \right) \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right).$$

On peut alors appliquer la méthode précédente à ce vecteur, ou la formule du cours pour le conditionnement avec $\theta = X_1 + 2X_2, \xi = X_3,\ \mu_\theta = 2, \mu_\xi = 0,\ M_{\theta\xi} = M_{\xi\theta} = 4, M_{\xi\xi} = 3, M_{\theta\theta} = 7$, pour obtenir

$$\mathbb{E}[X_1 + 2X_2 \mid X_3] = \mu_\theta + M_{\theta\xi} M_{\xi\xi}^{-1}(\xi - \mu_\xi) = 2 + \frac{4}{3} X_3,$$

et

$$\mathrm{Var}[X_1 + 2X_2 \mid X_3] = M_{\theta\theta} - M_{\theta\xi} M_{\xi\xi}^{-1} M_{\xi\theta} = 7 - \frac{16}{3} = \frac{5}{3}.$$

Exercice 10 (CC2 2023)**.**

On suppose dans cet exercice que (X, Y) est un couple de variables aléatoires tel que pour toute $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ borélienne,

$$\mathbb{E}[\phi(X, Y)] = \sum_{n \geq 1} \frac{2}{3^n \sqrt{2\pi n}} \int_{\mathbb{R}} \phi(n, y) \exp\left(-\frac{y^2}{2n} \right) dy.$$

1. Montrer que $X \sim \mathrm{Geom}(2/3)$.
2. Vérifier que pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $f(Y) \in \mathbb{L}^1$, on a

$$\mathbb{E}[f(Y) \mid X] = \sum_{n \geq 1} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} f(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2n} \right) dy \right) \mathbb{1}_{\{X=n\}}$$

%1. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, %

$$\mathbb{E}[Y^k \mid X] = \frac{k!}{X^{2k}}$$

3. Calculer $\mathbb{E}[\exp(itY) \mid X]$, $t \in \mathbb{R}$, quelle est la loi conditionnelle de Y sachant X ?
4. Déduire que si $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[\exp(itY)] = \frac{2 \exp\left(-\frac{t^2}{2} \right)}{3 - \exp\left(-\frac{t^2}{2} \right)}.$$

Solution

1. Notons que pour tout $n \geq 1$, $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2n} \right) dy = 1$ (on intègre sur $\mathbb{R}$ la densité d'une variable de loi $\mathcal{N}(0, n)$). On en déduit (quitte à considérer $\phi(X, Y) = \mathbb{1}_{\{X=n\}}$)

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X=n\}}] = \frac{2}{3^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2n} \right) dy = \frac{2}{3^n},$$

   et il découle que $X \sim \mathrm{Geom}(2/3)$.

2. Les événements $\{\{X = n\}, n \geq 1\}$ forment une partition de Ω, on est dans le cadre de EF3 pour $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f)$ et quitte à utiliser la linéarité de l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}[f(Y) \mid X] = \sum_{n\geq 1} \frac{\mathbb{E}[f(Y)\mathbb{1}_{\{X=n\}}]}{\mathbb{P}(X=n)} \mathbb{1}_{\{X=n\}}.$$

Quitte à considérer $\phi(X,Y) = \mathrm{Re(f(Y))}\mathbb{1}_{\{X=n\}}$ puis $\phi_2(X,Y) = \mathrm{Im(f(Y))}\mathbb{1}_{\{X=n\}}$ et utiliser la linéarité de l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}[f(Y)\mathbb{1}_{\{X=n\}}] = \frac{2}{3^n\sqrt{2\pi n}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2n}\right) dy,$$

et donc

$$\frac{\mathbb{E}[f(Y)\mathbb{1}_{\{X=n\}}]}{\mathbb{P}(X=n)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} f(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2n}\right) dy,$$

ce qui conduit à la formule souhaitée.

Solution (suite)

1. Puisque la fonction caractéristique d'une variable suivant la loi $\mathcal{N}(0,n)$ est $t \to \exp\left(-\frac{t^2 n}{2}\right)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(ity) \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2n}\right) dy = \exp\left(-\frac{t^2 n}{2}\right)$$

de sorte que

$$\mathbb{E}[\exp(itY) \mid X] = \exp\left(-\frac{t^2 X}{2}\right).$$

La loi conditionnelle de Y sachant X est donc $\mathcal{N}(0,X)$.

2. On a grâce à la propriété de tour et la question précédente

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp(itY)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\exp(itY) \mid X]] = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{t^2 X}{2}\right)\right] \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{2}{3^n} \exp\left(-\frac{t^2 n}{2}\right) \\
&= \frac{2\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}{3} \sum_{n\geq 1} \left(\frac{\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{2\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}{3} \sum_{n'\geq 0} \left(\frac{\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}{3}\right)^{n'} \\
&= \frac{2\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}{3} \frac{1}{1-\frac{\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}{3}} \\
&= \frac{2\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}{3-\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}
\end{aligned}$$

comme souhaité.

Exercice 11 (Partiel passé)**.**

Partie I

On considère le couple (X, Z) de densité jointe

$$f(x, z) := (z - x)\exp(-z)\mathbf{1}_{\{z \geq x \geq 0\}}.$$

1. Calculer la loi de X, puis celle de Z.
2. En déduire que

$$f_{X|Z}(x \mid z) = \frac{2(z - x)}{z^2}\mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq z, z > 0\}}.$$

3. Calculer $\mathbb{E}[X \mid Z]$, puis $\mathrm{Var}[X \mid Z]$.
4. Calculer $f_{Z|X}(z \mid x)$, puis démontrer que $\mathbb{E}[Z \mid X] = X + 2$.
5. Quelle est la loi du couple $(X, Z - X)$? En déduire la loi de $Z - X$.

Solution

1. La variable de X possède la densité f_X avec pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} dz f(x, z) = \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} \int_x^{\infty} (z - x)\exp(-z) dz \\ &= \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} \int_0^{\infty} y \exp(-(y + x)) dy \\ &= \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} \exp(-x) \end{aligned}$$

en utilisant le changement de variables $y = z - x$ et le fait que $\int_0^{\infty} y \exp(y)$ vaut 1 (par exemple en reconnaissant l'espérance d'une exponentielle standard, ou alors en effectuant une i.p.p). On conclut que $X \sim \exp(1)$.
La variable Z possède la densité f_Z avec pour $z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{\mathbb{R}} dx f(x, z) \\ &= \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} \exp(-z) \int_0^{z} (z - x) dz \\ &= \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} \exp(-z) \frac{z^2}{2} \end{aligned}$$

et on conclut que $Z \sim \Gamma(2, 1)$.

Solution (suite)

1. On a donc

$$f_{X|Z}(x \mid z) = \begin{cases} \frac{f(x,z)}{f_Z(z)} & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \frac{2(z - x)}{z^2}\mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq z, z > 0\}}.$$

2. On déduit pour $z > 0$,

$$
\begin{aligned}
Phi(z) &:= \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Z}(x \mid z) dx \\
&= \int_0^x \frac{2x(z-x)}{z^2} dx = \frac{z^3 - \frac{2}{3}z^3}{z^2} = \frac{z}{3}
\end{aligned}
$$

et on conclut d'après le résultat EF4 que $\mathbb{E}[X \mid Z] = \Phi_1(Z) = \frac{Z}{3}$.
De plus pour $z > 0$,

$$
\begin{aligned}
\Phi_2(z) &:= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_{X|Z}(x \mid z) dx \\
&= \int_0^x \frac{2x^2(z-x)}{z^2} dx = \frac{2}{3}z^2 - \frac{1}{2}z^2 = \frac{z^2}{6}
\end{aligned}
$$

de sorte, toujours par le même résultat, que $\mathbb{E}[X^2 \mid Z] = \Phi_2(Z) = \frac{Z^2}{6}$.
On déduit que

$$
\mathrm{Var}[X \mid Z] = \mathbb{E}[X^2 \mid Z] - (\mathbb{E}[X \mid Z])^2 = \frac{Z^2}{6} - \frac{Z^2}{9} = \frac{Z^2}{18}.
$$

Solution (suite)

1. On a

$$
f_{Z|X}(z \mid x) = \begin{cases} \frac{f(x,z)}{f_X(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = (z-x)\exp(-(z-x))\mathbf{1}_{\{0<x\leq z\}}.
$$

On déduit que pour $x > 0$,

$$
\begin{aligned}
\Psi(x) &:= \int_{\mathbb{R}} z f_{Z|X}(z \mid x) dz \\
&= \int_x^\infty z(z-x)\exp(-(z-x)) dx \\
&= \int_0^\infty (x+u)u\exp(-u) du \\
&= [-(x+u)u\exp(-u)]_0^\infty + \int_0^\infty (x+2u)\exp(-u) du \\
&= [-(x+2u)\exp(-u)]_0^\infty + \int_0^\infty 2\exp(-u) du = x+2,
\end{aligned}
$$

et on obtient, toujours par EF4, comme souhaité, que $\mathbb{E}[Z \mid X] = \Psi(X) = X + 2$.

1. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ borélienne, par le changement de variables $(x,z) \to (x, z-x)$ de $\{(z,x) : 0 \leq x \leq z\}$ dans $\mathbb{R}_+^2$ on obtient
2.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi(X, Z-X)] &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \phi(x, z-x)(z-x)\exp(-z)\mathbb{1}_{\{z\geq x\}}dxdz \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \phi(u,v)\exp(-u)v\exp(-v)dudv\end{aligned}$$

et on obtient que $X \sim \exp(1)$ est indépendante de $Z - X \sim \text{Gamma}(2,1)$.

Partie II

1. Soit $z > 0$. On suppose que $U_1^z \sim \text{Unif}[0,z]$, $U_2^z \sim \text{Unif}[0,z]$ et que U_1^z est indépendante de U_2^z. Calculer la densité de $\min(U_1^z, U_2^z)$.
2. On suppose à présent que conditionnellement à Z, $U_1^Z \sim \text{Unif}[0,Z]$, $U_2^Z \sim \text{Unif}[0,Z]$ et que U_1^Z est (toujours conditionnellement à Z) indépendante de U_2^Z. Montrer que, conditionnellement à Z, $\min(U_1^Z, U_2^Z)$ a la même loi que X.
3. Soient X_1, X_2, X_3 trois variables indépendantes, toutes trois distribuées suivant la distribution exponentielle de paramètre 1. On note $S = X_1 + X_2 + X_3$. Déterminer la loi de (X_1, S). Que vaut $\mathbb{E}[X_1 \mid S]$? $\mathbb{E}[S \mid X_1]$? Montrer finalement que conditionnellement à S, le couple $(X_1, X_1 + X_2)$ a la même loi que $(\min(U_1^S, U_2^S), \max(U_1^S, U_2^S))$.

Solution

1. La fonction de répartition F de U_1^z (et donc de U_2^z puisqu'elle a la même loi est donnée entre 0 et z par $F(x) = \frac{x}{z}, 0 \leq x \leq z$. On déduit que pour $0 \leq x \leq z$, en utilisant l'indépendance de U_1^z, U_2^z à la deuxième ligne ci-dessous,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\min(U_1^z, U_2^z) > x) &= \mathbb{P}(U_1^z > x)\mathbb{P}(U_2^z > x) \\ &= (1 - F(x))^2 = \left(1 - \frac{x}{z}\right)^2\end{aligned}$$

et on déduit que la densité de $\min(U_1^z, U_2^z)$ est donnée par

$$g_z(x) = \frac{2}{z}\left(1 - \frac{x}{z}\right)\mathbb{1}_{[0,z]}(x), \; x \in \mathbb{R}.$$

2. D'après la question précédente, conditionnellement à Z, $\min(U_1^Z, U_2^Z)$ possède la densité conditionnelle g_Z. Par ailleurs, la densité conditionnelle de X sachant Z est $f_{X|Z}$ calculée à la question I.2 est p.p. égale à g_Z. On conclut que conditionnellement à Z, les variables X et $\min(U_1^Z, U_2^Z)$ ont la même loi.

Solution (suite)

1. Tout d'abord, par indépendance des trois variables exponentielles, (X_1, X_2, X_3) a densité donnée par

$$f(x_1, x_2, x_3) = \exp(-x_1 - x_2 - x_3)\mathbb{1}_{\{x_1\geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}}, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

On en déduit pour $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ borélienne, en utilisant à la deuxiième ligne le changement de variables $(x_1, x_2, x_3) \to (u = x_1, v = x_1 + x_2, w = x_1 + x_2 + x_3)$

de $\mathbb{R}_+^3$ dans $\{(u,v,w) \in \mathbb{R}_+^3 : u \leq v \leq w\}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(X_1, S)] &= \int_{\mathbb{R}_+^3} \phi(x_1, x_1 + x_2 + x_3) \exp(-x_1 - x_2 - x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^3 : u \leq v \leq w} \phi(u, w) \exp(-w) du dv dw \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^2 : u \leq w} \phi(u, w)(w - u) \exp(-w)
\end{aligned}$$

et on déduit que (X_1, S) a même loi que (X, Z).

Solution (suite)

Puisque les deux vecteurs ont même loi jointe, on peut utiliser la partie I pour déduire que

$$\mathbb{E}[X_1 \mid S] = \frac{S}{3}, \quad \mathbb{E}[S \mid X_1] = X_1 + 2.$$

On peut aussi prouver ces résultats directement (cf exercice 5)
D'après le calcul en début de question, la densité du triplet $(X_1.X_1 + X_2.S)$ est donnée par

$$h(u, v, w) = \mathbb{I}_{\{0 < u \leq v \leq w\}} \exp(-w) \quad (u, v, w) \in \mathbb{R}^3.$$

Quitte à noter $T = X_1.V = X_1 + X_2$ on a donc

$$h_{(T,V)|S}((t, v) \mid s) = \frac{2}{s^2} \mathbb{I}_{0 < t < v < s}.$$

Par ailleurs, la densité conditionnelle de (U_1^S, U_2^S) sachant S est donnée par

$$\frac{1}{w^2} \mathbb{I}_{[0,w]^2}(u, v), (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Ceci peut être récrit

$$\frac{1}{w^2} \mathbb{I}_{\{0 < u < v < w\}} + \mathbb{I}_{\{0 < v < u < w\}}, (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

la première partie correspondant aux cas où la première uniforme réalise le min des deux, et la deuxième partie aux cas où elle réalise le max.
Comme (U_1^S, U_2^S) jouent, conditionnellement à S, des rôles parfaitement symétriques, on déduit que $h_{(U,V)|S}$ est la densité de la statistique d'ordre de ces deux variables, ce qui est le résultat souhaité.

Exercice 12 (Partiel passé)**.**

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on définit

$$f(x, y) := \frac{4y}{x^3} \mathbf{1}_{\{0 < x < 1, 0 < y < x^2\}}.$$

Vérifier que f est bien une densité de probabilité, puis calculer les densités marginales f_X, f_Y.

Solution

Il est clair que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Reste à vérifier que $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$. Comme f est positive, on peut appliquer Fubini pour voir qu'on peut choisir un ordre quelconque d'intégration. Commençons par exemple par intégrer en y, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} f(x,y)dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} ydy\right) \frac{4}{x^3}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^4}{2}\frac{4}{x^3}dx \\ &= \int_0^1 2xdx = [x^2]_0^1 = 1,\end{aligned}$$

et on conclut que f est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$ (on remarquera qu'étant donnée la présence de l'indicatrice, un vecteur (X,Y) de densité f est presque sûrement à valeurs dans le carré ouvert $(0,1)^2$, et même presque sûrement à valeurs dans la partie du carré qui se trouve strictement sous la parabole $y = x^2$. En particulier, les lois marginales sont toutes deux supportées par $(0,1)$.).

Solution (suite)

Pour $x \in (0,1)$,

$$f_X(x) = \int_0^{x^2} f(x,y)dy = 2x.$$

de sorte que $f_X(x) = 2x\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$.
Enfin, pour $y \in (0,1)$, on a

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx \\ &= 2y\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{2}{x^3}dx \\ &= 2y\left[\frac{-1}{x^2}\right]_{\sqrt{y}}^1 = 2y\left(-1+\frac{1}{y}\right) = 2(1-y)\end{aligned}$$

de sorte que $f_Y(y) = 2(1-y)\mathbf{1}_{(0,1)}(y)$.

Calculer $f_{Y|X}(y \mid x)$ et en déduire que

$$\mathbb{E}[Y \mid X] = \frac{2}{3}X^2.$$

Solution

Rappelons que

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \text{ si } f_X(x) \neq 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On a donc

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} \frac{2y}{x^4}\mathbf{1}_{\{0<y<x^2\}} \text{ si } x \in (0,1) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On a alors $\mathbb{E}[Y \mid X] = \psi(X)$, où

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y \mid x) dy.$$

En particulier ψ a pour support $(0,1)$ et si $x \in (0,1)$,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int_0^{x^2} y \frac{2y}{x^4} dy \\ &= \frac{2}{x^4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{x^2} = \frac{2x^2}{3}. \end{aligned}$$

On conclut que

$$\mathbb{E}[Y \mid X] = \frac{2}{3}X^2.$$

Montrer que

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{2y}{1-y}\frac{1}{x^3}\mathbf{1}_{\{0<x<1,0<y<x^2\}},$$

puis calculer $\mathbb{E}[X \mid Y]$.

Solution

Comme dans la question précédente,

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x \mid y) &= \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \text{ si } f_Y(y) \neq 0 \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{4y}{2(1-y)x^3}\mathbf{1}_{\{0<x<1,0<y<x^2\}} & \text{si } y \in (0,1) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui est le résultat recherché puisque si $0 < x < 1$ et $0 < y < x^2$, on a bien $y \in (0,1)$. On a alors $\mathbb{E}[X \mid Y] = \phi(Y)$, où

$$\phi(y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x \mid y) dx.$$

En particulier ϕ a pour support $(0,1)$ et si $y \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}\phi(y) &= \frac{2y}{1-y}\int_{\sqrt{y}}^{1}\frac{1}{x^2}dx\\ &= \frac{2y}{1-y}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\sqrt{y}}^{1}\\ &= \frac{2y}{1-y}\left(-1+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\\ &= 2\sqrt{y}\frac{1-\sqrt{y}}{1-y} = 2\frac{\sqrt{y}}{1+\sqrt{y}}.\end{aligned}$$

Finalement

$$\mathbb{E}[X \mid Y] = 2\frac{\sqrt{Y}}{1+\sqrt{Y}}.$$

Exercice 13 (CC2 2023)**.**

Dans cet exercice on suppose que

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

et on pose $U = X^2$.

1. Vérifier que $U \sim \text{Gamma}(1/2, 1/4)$.
2. Montrer que (X, Y) possède une densité jointe g que l'on déterminera.
3. Montrer que (U, Y) possède la densité jointe
$$f(u,y) = \frac{1}{4\pi\sqrt{u}}\left(\exp\left(-\frac{u}{2} - y^2 + y\sqrt{u}\right) + \exp\left(-\frac{u}{2} - y^2 - y\sqrt{u}\right)\right)\mathbb{1}_{\{u>0\}}.$$
4. Calculer $f_{Y|U}(y \mid u)$. En déduire $\mathbb{E}[Y \mid U], \mathbb{E}[Y^2 \mid U]$ et $\text{Var}(Y \mid U)$. Vérifier qu'on a bien
$$\text{Var}[Y] = \mathbb{E}[\text{Var}[Y \mid U]] + \text{Var}[\mathbb{E}[Y \mid U]].$$
5. On suppose que conditionnellement à U, ξ et Z sont indépendantes avec $\xi \sim \text{Ber}(1/2)$ et $Z \sim \mathcal{N}\left(\frac{\sqrt{U}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Montrer que conditionnellement à U, $(2\xi - 1)Z$ a même loi que Y. Vérifier alors les calculs de la question précédente.

Indications

1. rappelle que pour $a > 0, \lambda > 0$, la densité d'une variable $G \sim \text{Gamma}(a, \lambda)$ est donnée par
$$f_G(x) = \frac{\lambda^a x^{a-1}}{\Gamma(a)}\exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{\{x>0\}}$$
2. On fera attention à distinguer les domaines $D_1 = \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$ et $D_2 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ pour pouvoir considérer les $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes

$$\Psi_1 : \begin{cases} D_1 \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ (x,y) \to (x^2, y) \end{cases}, \quad \Psi_2 : \begin{cases} D_2 \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ (x,y) \to (x^2, y) \end{cases}.$$

3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, les deux premiers moments de la variable $\zeta \sim \mathcal{N}\left(\alpha\frac{\sqrt{u}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sont

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\zeta] &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} y \exp\left(-\left(y - \alpha\frac{\sqrt{u}}{2}\right)^2\right) dy \\ &= \alpha\frac{\sqrt{u}}{2}, \\ \mathbb{E}[\zeta^2] = \mathbb{E}[\zeta]^2 + \mathrm{Var}[\zeta] &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} y^2 \exp\left(-\left(y - \alpha\frac{\sqrt{u}}{2}\right)^2\right) dy \\ &= \alpha^2\frac{u}{4} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Solution

1. On a $U = X^2$ avec $X \sim \mathcal{N}(0,2)$. Pour $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ borélienne, on obtient donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi(U)] &= \int_{\mathbb{R}} \phi(x^2)\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_-^*} \phi(x^2)\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) dx + \int_{\mathbb{R}_+^*} \phi(x^2)\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) dx \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $u = x^2$ dans chacune des deux intégrales ci-dessus on obtient

$$\mathbb{E}[\phi(U)] = \int_{\mathbb{R}_+^*} \phi(u)\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{u}{4}\right) du,$$

et on conclut que

$$f_U(u) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{u}{4}\right) \mathbb{1}_{\{u>0\}},$$

ce qui est bien la densité d'une Gamma$(1/2, 1/4)$. 1. D'après le cours, un vecteur gaussien bi-dimensionnel suivant la loi $\mathcal{N}(0,\Sigma)$ a une densité sur $\mathbb{R}^2$ ssi $\det(\Sigma) \neq 0$ et cette densité au point (x,y) vaut

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right).$$

Solution (suite)

Ici $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\det(\Sigma) = 1$, $\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, et on obtient donc

$$g(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2} - xy - y^2\right)$$

1. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ borélienne, on a d'après la question précédente

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(U,Y)] &= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x^2,y)\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2}{2}-xy-y^2\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}_-^*\times\mathbb{R}} \phi(x^2,y)\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2}{2}-xy-y^2\right) dcdy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}} \phi(x^2,y)\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2}{2}-xy-y^2\right) dxdy
\end{aligned}
$$

L'application $(x,y)\to(u=x^2,y)$ est un changement de variables de $\mathbb{R}_-^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, avec $x=-\sqrt{u}$, et de $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ avec $x=\sqrt{u}$, dont le jacobien inverse est $\frac{1}{2\sqrt{u}}$. On obtient donc :

$$
\mathbb{E}[\phi(U,Y)] = \int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}} \frac{1}{4\pi\sqrt{u}}\left(\exp\left(-\frac{u}{2}+\sqrt{u}y-y^2\right)+\exp\left(-\frac{u}{2}-\sqrt{u}y-y^2\right)\right) dudy
$$

ce qui conduit bien au résultat souhaité.
Remarque : Comme

$$
\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{u}{4}+\sqrt{u}y-y^2\right) dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{u}{4}-\sqrt{u}y-y^2\right) dy = 1,
$$

puisque la première intégrale est celle de la densité d'une variable $\sim\mathcal{N}(-\sqrt{u}/2,1/2)$, et la deuxième intégrale celle de la densité d'une variable $\mathcal{N}(\sqrt{u}/2,1/2)$, on retrouve bien que

$$
f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f(u,y)dy = \frac{2}{4\sqrt{\pi u}}\exp\left(-\frac{u}{4}\right)\mathbb{1}_{\{u>0\}},
$$

comme à la question 1.

Solution (suite)

1. On a donc

$$
f_{Y|U}(y\mid u) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\exp\left(-\frac{u}{4}-y^2-y\sqrt{u}\right)+\exp\left(-\frac{u}{4}-y^2+y\sqrt{u}\right)\right)\mathbb{1}_{\{u>0\}}.
$$

Remarquons que

$$
\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} y\exp\left(-\frac{u}{4}-y^2+y\sqrt{u}\right) dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(y-\frac{\sqrt{u}}{2}\right)^2\right) dy
$$

est la moyenne d'une variable $\sim\mathcal{N}(-\sqrt{u},1/2)$, elle vaut donc $-\frac{\sqrt{u}}{2}$.
Par le même raisonnement, $\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}y^2\exp\left(-\frac{u}{4}-y^2+y\sqrt{u}\right)dy$ est l'espérance du carré de cette même variable, et vaut donc $\frac{1}{2}+\frac{u}{4}$.
De même, $\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}y\exp\left(-\frac{u}{4}-y^2-y\sqrt{u}\right)dy$ est la moyenne d'une variable $\sim\mathcal{N}(\frac{\sqrt{u}}{2},1/2)$, et vaut donc $\frac{\sqrt{u}}{2}$, tandis que $\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}y^2\exp\left(-\frac{u}{4}-y^2+y\sqrt{u}\right)dy$ est l'espérance du carré de cette même variable, et vaut donc $\frac{1}{2}+\frac{u}{4}$.
On a donc

$$\int_{\mathbb{R}} y f_{Y|U}(y \mid u)dy = -\frac{1}{4}\sqrt{u} + \frac{1}{4}\sqrt{u} = 0, \qquad \text{donc } \mathbb{E}[Y \mid U] = 0$$

tandis que

$$\int_{\mathbb{R}} y^2 f_{Y|U}(y \mid u)dy = \frac{1}{4}(u+2) + \frac{1}{4}(u+2) = u+2 \qquad \text{donc } \mathbb{E}[Y^2 \mid U] = \frac{1}{2} + \frac{U}{4}.$$

Enfin

$$\mathrm{Var}[Y \mid U] = \mathbb{E}[Y^2 \mid U] - \mathbb{E}[Y \mid U]^2 = \frac{1}{2} + \frac{U}{4}.$$

Bien s^ur $\mathrm{Var}[\mathbb{E}[Y \mid U]] = 0$. Comme $\mathbb{E}[U] = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 2$, on a bien

$$\mathbb{E}[\mathrm{Var}[Y \mid U]] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

et on a bien $\mathrm{Var}(Y) = 1 = \mathbb{E}[\mathrm{Var}[Y \mid U]] + \mathrm{Var}[\mathbb{E}[Y \mid U]]$.

Solution (suite)

1. La densité d'une variable $\zeta \sim \mathcal{N}\left(\frac{\sqrt{u}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est donnée par

$$f_\zeta(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(y - \frac{\sqrt{u}}{2}\right)^2\right), \; y \in \mathbb{R}.$$

Celle de $-\zeta \sim \mathcal{N}\left(-\frac{\sqrt{u}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est donc donnée par

$$f_{-\zeta}(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(y + \frac{\sqrt{u}}{2}\right)^2\right), \; y \in \mathbb{R}.$$

Si $\xi \sim \mathrm{Ber}(1/2)$, la variable $(2\xi - 1)\zeta$ a donc densité $\frac{1}{2}\left(f_\zeta(y) + \frac{1}{2} f_{-\zeta}(y)\right), y \in \mathbb{R}$, et on déduit que la densité conditionnelle de $(2\xi - 1)Z$ sachant U au point (y, u) est donnée par $f_{Y|U}(y \mid u)$. Ainsi (U, Y) et $(U, (2\xi - 1)Z)$ ont même loi.
On retrouve bien :

$$\mathbb{E}[Y \mid U] = \mathbb{E}[(2\xi - 1)Z \mid U] = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{U}}{2} - \frac{\sqrt{U}}{2}\right) = 0, \quad \mathbb{E}(Y^2 \mid U) = \mathbb{E}[Z^2 \mid U] = \frac{U}{4} + \frac{1}{2}$$

Exercice 14 (Rattrapage passé)**.**

Soit $X = (X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N}(0, M)$, où

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

1. Montrer que $\det(M) = 0$. Le vecteur X possède-t-il une densité dans $\mathbb{R}^3$?
2. Trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que X_1 et $Y = X_2 - aX_1$ soient indépendantes. Calculer $\mathrm{Var}(Y)$ et en déduire la loi de (X_1, Y).
3. Trouver la loi conditionnelle de X_2 sachant X_1.

Solution

1. On trouve $\ker(M) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ de dimension 1, donc $\det(M) = 0$. Le vecteur X est donc p.s. à valeurs dans $\text{Ker}(M)^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$, en particulier il ne possède pas de densité sur $\mathbb{R}^3$.

2. (X_1, Y) est un vecteur gaussien comme image par une application linéaire d'un vecteur gaussien, ses coordonnées sont donc indépendantes ssi $\text{Cov}(X_1, X_2 - aX_1) = 0$ ssi $a = 1$.
3. On déduit que $X_2 = X_1 + Y$, avec $Y = X_2 - X_1$ indépendant de X_1, et de loi $\mathcal{N}(0, 3)$ (on a utilisé que $\text{Var}(Y) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) - 2\text{Cov}(X_1, X_2) = 3$).

On conclut que conditionnellement à X_1, $X_2 \sim \mathcal{N}(X_1, 3)$.

Exercice 15 (Combinaison linéaire de gaussiennes)**.**

On considère $X_0 = 0$, et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, identiquement distribuées suivant la loi normale centrée réduite.

On introduit les variables

$$Y_i = \frac{X_i - X_{i-1}}{i}, i \geq 1.$$

Pour $n \geq 1$, montrer que le vecteur $(Y_1, ..., Y_n)$ est gaussien, puis calculer le vecteur moyenne et la matrice de covariances de $(Y_1, ..., Y_n)$.

Solution

Fixons $n \geq 1$ et notons $\mathbf{X}_n = (X_1, ..., X_n)$, $\mathbf{Y}_n = (Y_1, ..., Y_n)$.
Les variables $\{X_i\}_{i=1}^n$ étant des gaussiennes centrées réduites indépendantes, on a déjà montré (par exemple à la première question du partiel) que $(X_1, ..., X_n)$ est un vecteur gaussien (et d'ailleurs $\mathbf{X}_n \sim \mathcal{N}(0, I_n)$).
Notons alors

$$A_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1/n & 1/n \end{pmatrix},$$

de sorte que $\mathbf{Y}_n = A_n \mathbf{X}_n$, et le vecteur $\mathbf{Y}_n$ est donc bien un vecteur gaussien en tant que transformation linéaire du vecteur gaussien $\mathbf{X}_n$.

Solution (suite)

D'après un théorème du cours, on a alors que $\mathbf{Y}_n \sim \mathcal{N}(A_n 0, A_n I_n A_n^T)$, i.e. $\mathbf{Y}_n \sim \mathcal{N}(0, A_n A_n^T)$, où

$$A_nA_n^T = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1/6 & 2/9 & -1/12 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & & 0 & -\frac{1}{n(n-1)} & \frac{2}{n^2} \end{pmatrix}.$$

Calculer, pour $n \geq 1$, $\mathbb{E}[Y_{n+1} \mid Y_n]$.

Solution

Pour $a \in \mathbb{R}$ on peut toujours écrire $Y_{n+1} = Y_{n+1} + aY_n - aY_n$.
Comme le vecteur $\mathbf{Y}_{n+1}$ est gaussien, la variable $Y_{n+1} + aY_n$ est indépendante de Y_n si et seulement si $\operatorname{cov}(Y_{n+1} + aY_n, Y_n) = 0$. Or

$$\operatorname{cov}(Y_{n+1} + aY_n, Y_n) = -\frac{1}{n(n+1)} + \frac{2a}{n^2},$$

qui s'annule pour $a = \frac{n}{2(n+1)}$.
On a alors, en utilisant cette indépendance et le fait que les variables Y_n, Y_{n+1} sont centrées :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[(Y_{n+1} + \frac{n}{2(n+1)}Y_n) \mid \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[\frac{n}{2(n+1)}Y_n \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[Y_{n+1} + \frac{n}{2(n+1)}Y_n] - \frac{n}{2(n+1)}Y_n \\ &= -\frac{n}{2(n+1)}Y_n.\end{aligned}$$

Exercice 16 (Loi jointe à densité)**.**

Soient (X, Y) dont la loi jointe a pour densité $f(x, y) = x(y-x)\exp(-y), 0 \leq x \leq y < \infty$. On introduit la notation $f_{X|Y}(x|y) := f(x, y)/f_Y(y)$ lorsque le quotient est > 0, 0 sinon.

1. Exprimer $f_{X|Y}(x|y)$, puis $f_{Y|X}(y|x)$.
2. En déduire les expressions de $\mathbb{E}[X|Y], \mathbb{E}[Y|X]$.

Solution

1. Calculons d'abord les densités marginales.

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \mathbb{1}_{\{x>0\}} \int_x^\infty x(y-x)\exp(-y)dy \\ &= \mathbb{1}_{\{x>0\}} x\exp(-x) \int_0^\infty u\exp(-u)du = \mathbb{1}_{\{x>0\}} x\exp(-x)\end{aligned}$$

de sorte que $X \sim \text{Gamma}(2, 1)$.
Par ailleurs

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \mathbb{1}_{\{y>0\}} \exp(-y) \int_0^y x(y-x)dx \\
&= \mathbb{1}_{\{y>0\}} \exp(-y) \left(\frac{y^3}{2} - \frac{y^3}{3} \right) = \mathbb{1}_{\{y>0\}} \exp(-y) \frac{y^3}{6}
\end{aligned}
$$

de sorte que $Y \sim \mathrm{Gamma}(4,1)$.
On déduit

$$
f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{6x(y-x)}{y^3} \mathbb{1}_{\{0<x<y\}},
$$

$$
f_{Y|X}(y \mid x) = (y-x)\exp(-(y-x))\mathbb{1}_{\{0<x<y\}}.
$$

Remarque : On peut assez facilement interpréter cette deuxième densité conditionnelle : sachant X, $Y = X + U$ où $U \sim \Gamma(2,1)$ indépendante de X.

Solution (suite)

1. On a

$$
\int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x \mid y) dx = \int_0^y \frac{6x^2(y-x)}{y^3} dx = 2y - \frac{3}{2} y = \frac{y}{2},
$$

et on conclut que $\mathbb{E}[X \mid Y] = \frac{Y}{2}$.
D'autre part

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y \mid x) dy &= \int_x^\infty y(y-x)\exp(-(y-x))dy \\
&= \int_0^\infty (u+x)u\exp(-u)du \\
&= [-(u+x)u\exp(-u)]_0^\infty + \int_0^\infty (2u+x)\exp(-u)du \\
&= [-(2u+x)\exp(-u)]_0^\infty + \int_0^\infty 2\exp(-u)du = x+2
\end{aligned}
$$

et on conclut que $\mathbb{E}[Y \mid X] = X + 2$.

Exercice 17 (Exponentielles conditionnées)**.**

Soient Y, Z deux v.a.r. indépendantes $\sim \exp(\lambda)$ où $\lambda > 0$. On pose $X = Y + Z$. Quelle est la loi conditionnelle de Y sachant X ? Que vaut $\mathbb{E}[Y|X]$? En déduire l'expression de $\mathbb{E}[Y|X]$

Solution

Remarquons déjà que par le même raisonnement que dans l'exercice 5 on trouve $\mathbb{E}[Y \mid X] = \frac{X}{2}$.
Pour le reste on peut faire un raisonnement similaire aux exercices 11, 15. D'abord, pour $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ borélienne,

$$\mathbb{E}[\phi(Y, Y+Z)] = \int_{\mathbb{R}_+^2} \phi(y, y+z)\lambda^2 \exp(-\lambda(y+z))dydz$$
$$= \int_{\mathbb{R}_+^2} \mathbb{1}_{\{y\leq x\}}\phi(y,x)\lambda^2 \exp(-\lambda x)dydx$$

de sorte que $f_{(Y,X)}(y,x) = \mathbb{1}_{\{0<y<x\}}\lambda^2\exp(-\lambda x),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$.
Comme $X \sim \text{Gamma}(2,1)$ on a
$f_X(x) = \lambda^2\exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{\{x>0\}}, x\in\mathbb{R}$
et donc

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{1}{x}\mathbb{1}_{\{0<y<x\}}$$

de sorte que la loi conditionnelle de Y sachant X est Unif$[0,X]$. On conclut que $\mathbb{E}[Y \mid X] = \frac{X}{2}$.

Exercice 18 (Gaussiennes corrélées)**.**

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, toutes deux normales centrées réduites. On définit pour $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho| \leq 1$,

$$U = \sigma_1 X, \quad V = \sigma_2\rho X + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}Y.$$

1. Quelle est la loi de (U,V) ?
2. Que vaut $\mathbb{E}[UV]$?
3. Que vaut $\mathbb{E}[U \mid V]$?$\mathbb{E}[V \mid U]$?$\text{Var}[U \mid V]$?$\text{Var}[V \mid U]$?

Solution

1. On a $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2\rho & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, avec $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(0, I_2)$. Or $\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2\rho & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} I_2 \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2\rho & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$, on déduit donc que $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$.
2. On a $\mathbb{E}[UV] = \text{Cov}(UV) = \sigma_1\sigma_2\rho$ d'après la question précédente.
3. D'après les formules du cours, avec $\theta = U, \xi = V$, $\mu_\theta = \mu_\xi = 0, M_{\theta\xi} = M_{\xi\theta} = \sigma_1\sigma_2\rho, M_{\theta\theta} = \sigma_1^2$ et $MM_{\xi\xi} = \sigma_2^2$, on trouve que

$$\mathbb{E}[U \mid V] = M_{\theta\xi}M_{\xi\xi}^{-1}\xi = \frac{\sigma_1\rho}{\sigma_2}V, \qquad \text{Var}[U \mid V] = M_{\theta\theta} - M_{\theta\xi}M_{\xi\xi}M_{\xi\theta} = \sigma_1^2(1-\rho^2)$$

Solution (suite)

De manière symétrique on trouve que

$$\mathbb{E}[V \mid U] = \frac{\sigma_2\rho}{\sigma_1}U, \qquad \text{Var}[V \mid U] = \sigma_2^2(1-\rho^2).$$

Remarque : $\mathrm{Cov}(\alpha U + V, U) = \alpha\sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2$, on trouve donc pour $\alpha = -\frac{\sigma_2\rho}{\sigma_1}$ que

$$V = \frac{\sigma_2\rho}{\sigma_1}U + \left(-\frac{\sigma_2\rho}{\sigma_1}U + V\right),$$

la première partie de la somme étant bien s^ur $\sigma(U)$-mesurable, alors que la deuxième en est indépendante, et suit la loi $\mathcal{N}(0, \sigma_2^2(1-\rho^2))$. On retrouve donc bien que conditionnellement à $U, V \sim \mathcal{N}\left(\frac{\sigma_2\rho}{\sigma_1}U, \sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$.

{*Remarque 2*} : σ_1^2 *est la variance de* U, σ_2^2 *celle de* V, *et* ρ *est le coefficient de corrélation de* U *et* V. *L'énoncé de l'exercice fournit donc une mani ere de fabriquer un vecteur gaussien* 2*-dimensionnel et non dégénéré quelconque à partir d'un vecteur gaussien centré réduit.*

Exercice 19 (Gaussiennes corrélées (2))**.**

Soit $Z = (X, Y)$ un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que $E(X) = E(Y) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$ et que $\mathrm{Cov}(X; Y) = \rho$ avec $|\rho|^2 \neq 1$. On pose $U = X - \rho Y, V = \sqrt{1-\rho^2}Y$.

1. Quelles sont les lois de U et V ? Les v.a. U et V sont-elles indépendantes ?
2. Calculer $\mathbb{E}(U^2V^2), \mathbb{E}(UV^3), \mathbb{E}(V^4)$. En déduire $\mathbb{E}(X^2Y^2)$.
3. Retrouver ce dernier résultat par conditionnement.

Solution

1. On a $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, avec $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$. Or $\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$, on déduit donc que $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\rho^2 & 0 \\ 0 & 1-\rho^2 \end{pmatrix}\right)$, autrement dit U et V sont i.i.d de loi $\mathcal{N}(0, 1-\rho^2)$.
2. On déduit

$$\mathbb{E}[U^2V^2] = (1-\rho^2)^2, \quad \mathbb{E}[UV^3] = 0, \quad \mathbb{E}[V^4] = 3(1-\rho^2).$$

   On a donc (V et Y ne diffèrent que par une constante multiplicative donc U est indépendant de Y

$$\mathbb{E}[X^2Y^2] = \mathbb{E}[(U+\rho Y)^2Y^2] = \mathbb{E}[U^2]\mathbb{E}[Y^2] + 2\rho\mathbb{E}[U]\mathbb{E}[Y^3] + \rho^2\mathbb{E}[Y^4] = (1-\rho^2) + 3\rho^2 = 1 + 2\rho^2.$$

Solution (suite)

1. On a vu que $U = X - \rho Y$ est indépendant de Y (et suit une $\mathcal{N}(0, 1-\rho^2)$, donc sachant Y, $X \sim \mathcal{N}(\rho Y, 1-\rho^2)$. En particulier $\mathbb{E}[X^2 \mid Y] = \mathbb{E}[X \mid Y]^2 + \mathrm{Var}[X \mid Y] = \rho^2Y^2 + 1 - \rho^2$. On a donc

$$\mathbb{E}[X^2Y^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^2Y^2 \mid Y]] = \mathbb{E}[\rho^2Y^4 + (1-\rho^2)Y^2] = 3\rho^2 + (1-\rho^2) = 1 + 2\rho^2.$$

Exercice 20 (Gaussiennes)**.**

Soient U, V, W trois v.a.r. gaussiennes centrées réduites. On pose

$$Z = \frac{U + VW}{\sqrt{1+W^2}}.$$

1. Quelle est la loi conditionnelle de Z sachant W ?
2. En déduire que Z et W sont indépendantes et donner la loi de Z.

Solution

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la loi de $\frac{U+\alpha V}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ est gaussienne, centrée, et de variance

$$\frac{\mathrm{Var}(U) + 2\alpha \mathrm{Cov}(U,V) + \alpha^2 \mathrm{Var}(V)}{1+\alpha^2} = 1.$$

   Donc, quelque soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\frac{U+\alpha V}{\sqrt{1+\alpha^2}} \sim \mathcal{N}(0,1)$. On déduit que sachant W, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$
2. La loi conditionnelle de Z sachant W ne dépend pas de W (et c'est sa loi), on déduit que Z et W sont indépendantes. La loi de Z est $\mathcal{N}(0,1)$.

Solution (suite)

Raisonnement alternatif :
Par hypothèse, (U, V, W) possède la densité jointe

$$f(u,v,w) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)\right), \quad (u,v,w) \in \mathbb{R}^3.$$

Calculons la densité de (W, Z). Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ borélienne. On va utiliser le changement de variables $\Psi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (u,v,w) \to (z,s,t) \end{cases}$ avec $z = \frac{u+vw}{\sqrt{1+w^2}}, s = v, t = w$. Il s'agit bien d'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, d'inverse
$u = z\sqrt{1+t^2} - st, v = s, w = t$ et de jacobien inverse $\sqrt{1+t^2}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(W,Z)] &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \phi\left(w, \frac{u+vw}{\sqrt{1+w^2}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)\right) dudvdw \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \phi(t,z)\sqrt{1+t^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(z^2(1+s^2) + s^2t^2 - 2zts\sqrt{1+t^2} + s^2 + t^2\right)\right) dsdtdz \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(2\pi)} \exp\left(-\frac{1}{2}(z^2+t^2)\right) dtdz \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(s\sqrt{1+t^2} - zt)^2\right) ds
\end{aligned}$$

Comme $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(s\sqrt{1+t^2}-zt)^2\right) ds = 1$ (on reconnaît l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de la densité d'une $\mathcal{N}(\frac{zt}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}})$, on obtient

$$\mathbb{E}[\phi(W,Z)] = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(2\pi)} \exp\left(-\frac{1}{2}(s^2+t^2)\right)$$

et on conclut que (W, Z) est un vecteur gaussien bi-dimensionnel, centré réduit, et on retrouve les résultats précédents.

Exercice 21 (Maxima d'exponentielles).

Soient X_1 et X_2 des v.a. indépendantes, de lois exponentielles de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.

1. Calculer $\mathbb{E}[\max(X_1, X_2) \mid X_1]$.
2. Calculer $\mathbb{E}[\max(X_1; X_2)]$.

Solution

1. $X_2 \sim \exp(\lambda_2)$ et possède donc la propriété d'absence de mémoire. Pour $a > 0$ fixé on a donc

On en déduit que

$$\mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_{\{X_1 \geq X_2\}} \mid X_1] = X_1(1-\exp(-\lambda_2 X_1)), \quad \mathbb{E}[X_2 \mathbb{1}_{\{X_2 \geq X_1\}} \mid X_1] = \left(X_1 + \frac{1}{\lambda_2}\right)\exp(-\lambda_2 X_1),$$

et donc

$$\mathbb{E}[\max(X_1, X_2) \mid X_1] = X_1 + \frac{1}{\lambda_2}\exp(-\lambda_2 X_1)$$

1. On a pour $t \geq 0$, $\mathbb{E}[\exp(-tX_1)] = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + t}$ et donc

$$\mathbb{E}[\max(X_1, X_2)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\max(X_1, X_2) \mid X_1]] = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)}.$$

Remarque, vérification : Soit $Y = \max(X_1, X_2)$, on a $F_Y(t) = F_{X_1}(t)F_{X_2}(t) = (1 - \exp(-\lambda_1 t))(1 - \exp(-\lambda_1 t))\mathbb{1}_{\{t \geq 0\}}$. On déduit

$$\begin{aligned} f_Y(t) &= (\lambda_1 \exp(-\lambda_1 t)(1 - \exp(-\lambda_2 t)) + \lambda_2 \exp(-\lambda_2 t)(1 - \exp(-\lambda_1 t)))\,\mathbb{1}_{\{t \geq 0\}} \\ &= (\lambda_1 \exp(-\lambda_1 t) + \lambda_2 \exp(-\lambda_2 t) - (\lambda_1 + \lambda_2)\exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)t))\,\mathbb{1}_{\{t \geq 0\}}. \end{aligned}$$

On calcule alors facilement

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} t f_Y(t)dt = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 22 (Densités jointes)**.**

On pose $h(x) = \frac{1}{\Gamma(a+1)}\exp(-x)x^{a-1}$ ($a > 0$ fixé) et $D = \{0 < y < x\}$. Soit $f(x, y) = h(x)\mathbf{1}_D(x, y)$:

1. Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$. On considère dans la suite un couple (X, Y) de v.a.r. de densité f.
2. Les v.a. X et Y/X sont-elles indépendantes ?
3. Quelle est la loi conditionnelle de Y sachant X ?
4. Soit U une v.a.r. indépendante du couple (X, Y) telle que $\mathbb{P}(U = 1) = p$ et $\mathbb{P}(U = 0) = 1 - p$. On pose $Z = UX + (1 - U)Y$. Quelle est l'espérance conditionnelle de Z sachant X ?

Solution

1. Comme $h(x)$ ne dépend pas de y, on a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy = xh(x)\mathbb{1}_{\{x>0\}} = \frac{x^a}{\Gamma(a+1)}\exp(-x)\mathbb{1}_{\{x>0\}},$$

et on reconnaˆıt là la densité d'une variable $\Gamma(a,1)$. On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{x^a}{\Gamma(a+1)}\exp(-x)dx = 1.$$

2. Notons $T = \frac{Y}{X}$, on a pour $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ borélienne, en utilisant le changement de variables $\Psi : \begin{cases} D \to \mathbb{R}_+^* \times (0,1) \\ (x,y) \to (x, t = \frac{y}{x}) \end{cases}$ de jacobien inverse x,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi(X,T)] &= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x, \frac{y}{x})\frac{x^{a-1}}{\Gamma(a+1)}\exp(-x)\mathbb{1}_{\{0<y<x\}}dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x,t)\frac{x^{a-1}}{\Gamma(a+1)}\exp(-x)\mathbb{1}_{\{x>0\}}\mathbb{1}_{(0,1)}(t)dxdz\end{aligned}$$

et on conclut que X et T sont indépendantes, de lois respectives $\Gamma(a,1)$, Unif$[0,1]$.

Solution (suite)

1. D'après ce qui précède, $Y = TX$, avec T indépendante de X, $\sim$ Unif$[0,1]$. Remarquons que si $a > 0$, $aT \sim$ Unif$[0,a]$. On déduit que sachant X, la loi conditionnelle de Y est Unif$[0,X]$.
2. On a en utilisant que $\mathbb{E}[XS \mid X] = X\mathbb{E}[S \mid X]$, puis l'indépendance de X, U, Z,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z \mid X] &= \mathbb{E}[UX \mid X] + \mathbb{E}[(1-U)TX \mid X] \\ &= X\mathbb{E}[U] + X\mathbb{E}[T(1-U)] = X\mathbb{E}[U] + X\mathbb{E}[T]\mathbb{E}[1-U] = \frac{3}{4}X.\end{aligned}$$

Exercice 23.

Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de v.a.r.i.i.d. de densité f et fonction de répartition F. Soient $N := \min\{n \geq 1 : X_n > X_0\}$ et
$M := \min\{n \geq 1 : X_0 \geq X_1 \geq ... \geq X_{n-1} < X_n\}$.

1. Trouver $\mathbb{P}(N = n)$, puis montrer que la fonction de répartition de X_N est $F + (1 - F)\log(1-F)$ (on pourra conditionner par les événements $\{N = n\}, n \in \mathbb{N}$).
2. Exprimer $\mathbb{P}(M = m), m \geq 1$.
3. On suppose dans cette question que $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$. Pour $x \in (0,1)$ on introduit $R^x := \min\{n \geq 1 : X_1 + ... + X_n > x\}$. Montrer que $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{R^x>n\}} \mid X_n] = \Phi(X_n)$ où $\Phi(u) = \mathbb{1}_{\{u<x\}}\mathbb{P}(R^{x-u} > n-1)$. En déduire $H_n(x) := \mathbb{P}(R^x > n)$.

Solution

1. Puisque les $(X_i, i \geq 1)$ sont à densité elles sont p.s. toutes distinctes, et puisqu'elles sont i.i.d elles sont échangeables. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout σ_n

permutation de $\{0,\dots,n\}$, $(X_0,...,X_n)$ a même loi que $(X_{\sigma_n(0)},\dots,X_{\sigma_n(n)})$.

Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'application $\tau_{n-1} : \{0,...,n-1\} \to \{0,...,n-1\}$ telle que \$ X_{ *{n-1}(0)} > X{* {n-1}(1)} > ...> X{ _{n-1}(n-1)}\$ est uniforme dans les permutations de $\{0,\dots,n-1\}$. En particulier,

$$\mathbb{P}(\max(X_0,...,X_{n-1}) = X_0) = \mathbb{P}(\tau_n(0) = 0) = \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N=n) &= \mathbb{P}(\max(X_0,...,X_{n-1}) = X_0, \max(X_0,...,X_n) = X_n) \\ &= \mathbb{P}(\tau_{n+1}(0) = n, \tau_{n+1}(1) = 0) \\ &= \frac{1}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, le maximum de $(n+1)$ telles variables i.i.d a pour fonction de répartition F^{n+1}. Or, sachant $\{N=n\}$, X_N réalise ce maximum, on a donc

$$\mathbb{P}(X_N < a \mid N = n) = F(a)^{n+1}$$

Il découle que

$$\mathbb{P}(X_N < a) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}(X_N < a \mid N=n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{F(a)^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Or si $y < 1$,

$$y + (1-y)\log(1-y) = y - (1-y)\sum_{n\geq1}\frac{y^n}{n} = y - \sum_{n\geq1}\frac{y^n}{n} + \sum_{n\geq1}\frac{y^{n+1}}{n} = \sum_{n\geq1}\frac{y^{n+1}}{n(n+1)},$$

et on vérifie que l'égalité reste vraie si $y = 1$. On conclut, comme souhaité, que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{F(a)^{n+1}}{n(n+1)} = F(a) + (1-F(a))\log(1-F(a)).$$

Solution (suite)

1. On a
$$\mathbb{P}(M=m) = \mathbb{P}(\tau_m = Id, \tau_{m+1} \neq Id) = \mathbb{P}(\tau_m = Id) - \mathbb{P}(\tau_{m+1} = Id) = \frac{1}{m!} - \frac{1}{(m+1)!} = \frac{m}{(m+1)!}$$

2. On a $\{R^x > n\} = \{X_1 + \dots + X_n < x\} = \{X_1 + \dots + X_{n-1} < x - X_n\} = \{X_n < x, R^{x-X_n} > n-1\}$. On déduit que sachant X_n,
$$R^x \begin{cases} \leq n \text{ si } X_n \geq x \text{ ou si } X_1 + \dots + X_{n-1} \geq x - X_n \\ < n \text{ si } X_n < x, \text{ et } R^{x-X_n} > n-1 \end{cases}.$$

ce qui conduit à l'égalité souhaitée gr^ace à EF5.
On a donc

$$H_n(x) = \mathbb{E}[\Phi(X_n)] = \int_0^1 \Phi(u)du = \int_0^x H_{n-1}(x-u)du = \int_0^x H_{n-1}(v)dv$$

et donc H_n est la primitive de H_{n-1} nulle en 0. Comme $H_1(x) = \mathbb{P}(X_1 \le x) = x$, on conclut que $H_n(x) = \frac{x^n}{n!}$

Exercice 24.

Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Quelle est l'espérance conditionnelle de $(Y-X)_+$ sachant X ?
2. Quelle est la loi conditionnelle de $(Y-X)_+$ sachant X ?

Solution

1. Comme (X,Y) est uniforme sur $[0,1]^2$, si $a \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(Y-X)^+ \mathbb{1}_{\{X\le a\}}] &= \int_0^a \int_0^1 (y-x)^+ dxdy \\ &= \int_0^a \left(\int_x^1 (y-x)dy\right) dx \\ &= \frac{1-(1-a)^3}{6}\end{aligned}$$

On cherche donc $\mathbb{E}[(Y-X)^+ \mid X]$ sous la forme $f(X)$ avec une fonction f telle que

$$\mathbb{E}[f(X)\mathbb{1}_{\{X\le a\}}] = \int_0^a f(u)du = \frac{1-(1-a)^3}{6},$$

et donc $f(u) = \frac{(1-u)^2}{2}$, ce qui permet de conclure que

$$\mathbb{E}[(Y-X)^+ \mid X] = \frac{(1-X)^2}{2}.$$

1. Pour $a \in [0,1]$, $(Y-a)^+ = 0\mathbb{1}_{\{Y\le a\}} + (Y-a)\mathbb{1}_{\{Y>a\}}$. De plus, sachant $\{Y > a\}$, la loi conditionnelle de $Y-a$ est uniforme sur $[0,1-a]$. Autrement dit,

$$(Y-a)^+ = \xi Z$$

où $\xi \sim \mathrm{Ber}(1-a)$ indépendante de $Z \sim \mathrm{Unif}[0,1-a]$, et si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est borélienne, on a

$$\mathbb{E}[\phi(Y-a)^+] = a\phi(0) + \int_0^{1-a} \phi(u)du.$$

Conditionnellement a X, définissons $\xi_X \sim \mathrm{Ber}(1-X)$, indépendamment de $Z_X \sim \mathrm{Unif}[0,1-X]$. Alors d'après ce qui précède,

$$\mathbb{E}[\phi(Y-X)^+ \mid X] = X\phi(0) + \int_0^{1-X} \phi(u)du.$$

Autrement dit, sachant X,

$$(Y-X)^+ = \xi_X Z_X.$$

Exercice 25.

Soient X_1, X_2, X_3 trois v. a. r. gaussiennes centrées réduites indépendantes. On pose $U = 2X_1 - X_2 - X_3, V = X_1 + X_2 + X_3, W = 3X_1 + X_2 - 4X_3$.

1. Quelles sont les lois de U, V et W? Quels sont les couples de v.a. indépendantes parmi les couples $(U,V), (U,W), (V,W)$?
2. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $W = aU + Z$ avec U et Z indépendantes. En déduire $\mathbb{E}(W \mid U)$.

Solution

1. On a

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & 26 \end{pmatrix},$$

de sorte que $\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & 26 \end{pmatrix} \right)$.

En particulier U et V sont indépendants, tout comme V et W, en revanche U et W ne le sont pas.

1. Pour que $W - aU$ soit indépendant de U il faut et il suffit que $\operatorname{Cov}(W - aU, U) = 9 - 6a = 0$ et il faut donc choisir $a = \frac{3}{2}$. On peut en déduire que sachant U, la loi conditionnelle de W est $\mathcal{N}(\frac{3}{2}U, \frac{25}{2})$, et en particuler que $\mathbb{E}[W \mid U] = \frac{3}{2}U$.

Exercice 26.

Soient X et Y deux v. a. r. gaussiennes centrées réduites indépendantes. On pose $Z = X+Y$, $W = X - Y$.

1. Montrer que Z et W sont indépendantes. Quelle est la loi de W?
2. En déduire l'espérance conditionnelle et la loi conditionnelle de X sachant Z.
3. Calculer $\mathbb{E}(XY \mid Z)$ et $\mathbb{E}(XYZ \mid Z)$.

Solution

1. On a ici

$$\begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

de sorte que $\begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right)$. En particulier Z et W sont indépendantes et $W \sim \mathcal{N}(0,2)$.
2. On a $X = \frac{Z+W}{2}$ et donc d'apr es ce qui précède, sachant Z, la loi condiitonnelle de X est $\mathcal{N}\left(\frac{1}{2}Z, \frac{1}{2}\right)$, et en particulier $\mathbb{E}[X \mid Z] = \frac{1}{2}Z$.
3. On a d'après ce qui précède, et les propriétés de l'espérance conditionnelle

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY \mid Z] &= \mathbb{E}[\frac{Z+W}{2}\frac{Z-W}{2} \mid Z] \\ &= \frac{Z^2}{4} - \frac{Z\mathbb{E}[W]}{2} + \frac{\mathbb{E}[W^2]}{4} \\ &= \frac{Z^2}{4} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

On déduit que

$$\mathbb{E}[XYZ \mid Z] = Z\mathbb{E}[XY \mid Z] = \frac{Z^3}{4} + \frac{Z}{2}.$$