

**CC I :**

- 7 Octobre 2025
- Master I ISIFAR
- Durée : 1 heure 30
- **Probabilités**

- Aide-mémoire : une feuille A4 recto verso autorisée
- Aucun autre document autorisé
- Aucun moyen de communication électronique autorisé

**Exercice 1.**

Soit  $X$  une variable binomiale à paramètres  $n$  (fixé) et  $V$  aléatoire uniformément distribué sur  $[0, 1]$  ( $X \sim \text{Binom}(n, V)$ ).

- i. Calculer la fonction génératrice des probabilités de la loi de  $X$
- ii. Quelle est l'espérance de  $X$  ?
- iii. Que vaut  $P\{X = k\}$  pour  $k \in \{0, n\}$  ?

**Solution**

(1) On utilisera la fait que si  $Y_i \sim_{\text{i.i.d.}} \text{Berp}(p)$ , alors  $\sum_{i=1}^n Y_i \sim \text{Binom}(n, p)$ . La fonction génératrice de  $\text{Binom}(n, p)$  s'écrit donc

$$s \mapsto (1 - p + ps)^n$$

et

$$\mathbb{E} [s^X \mid \sigma(V)] = (1 - p + ps)^n$$

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \mathbb{E} [s^X] \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [s^X \mid \sigma(V)]] \\ &= \mathbb{E} [(1 - V + Vs)^n] \\ &= \int_{[0,1]} (1 - v + vs)^n \, dv \\ &= \left[ \frac{1}{(n+1)(s-1)} (1 - v + vs)^{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{s^{n+1} - 1}{(n+1)(s-1)} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} s^k. \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction génératrice des probabilités de la loi uniforme sur  $\{0, \dots, n\}$

- (2) L'espérance coïncide avec la dérivée de  $G_X$  en 1. Elle vaut  $\frac{n}{2}$ .
- (3)  $P\{X = k\} = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{n+1}$ .

**Exercice 2.**

On se donne un processus de branchement avec une distribution de reproduction Poissonnienne de paramètre  $\mu > 0$ . On note  $Z_0 = 1, Z_1, \dots$  les effectifs des différentes générations.

- i. Calculer la fonction génératrice de la loi de  $Z_2$
- ii. Quelle est la probabilité que l'extinction ait lieu exactement à la génération 2 ?
- iii. Quelle est la probabilité que l'extinction ait lieu exactement à la génération  $n$  ?

**Solution**

(4) On  $G_\mu$  la fonction génératrice des probabilités de Poisson( $\mu$ ),  $G_n$  la fonction génératrice des probabilités de la loi de  $Z_n$ .

$$G_n = \underbrace{G_\mu \circ G_\mu \circ \dots \circ G_\mu}_{n \text{ fois}}$$

avec

$$G_\mu(s) = \exp(\mu(s - 1))$$

(5)

$$P\{\text{Extinction à la génération 2}\} = P\{Z_2 = 0 \vee Z_1 > 0\} = P\{Z_2 = 0\} - P\{Z_1 = 0\}$$

$$P\{\text{Extinction à la génération 2}\} = G_2(0) - G_1(0)$$

$$\begin{aligned} P\{\text{Extinction exactement à la génération 2}\} &= \exp(-\mu(1 - \exp(-\mu))) - \exp(-\mu) \\ &= \exp(-\mu) (\exp(\exp(-\mu)) - 1) \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} P\{\text{Extinction exactement à la génération } n\} &= P\{Z_n = 0 \vee Z_{n-1} > 0\} \\ &= P\{Z_n = 0\} - P\{Z_{n-1} = 0\} \end{aligned}$$

$$P\{\text{Extinction exactement à la génération } n\} = G_n(0) - G_{n-1}(0)$$

$$\begin{aligned} &P\{\text{Extinction exactement à la génération } n\} \\ &= \underbrace{G_\mu \circ G_\mu \circ \dots \circ G_\mu}_{n \text{ fois}}(0) - \underbrace{G_\mu \circ G_\mu \circ \dots \circ G_\mu}_{n-1 \text{ fois}}(0) \\ &= \dots \end{aligned}$$

**Solution Chat-GPT 3.5**

On a un processus de Galton–Watson avec loi de reproduction Poisson( $\mu$ ). Notons la fonction génératrice de la loi des descendants

$$f(s) = \mathbb{E}[s^\xi] = \exp(\mu(s - 1)),$$

où  $\xi \sim \text{Poisson}(\mu)$ .

i) Fonction génératrice de  $Z_2$

La fonction génératrice de  $Z_n$  est la  $n^{\text{ième}}$  composition de  $f$  avec elle-même, donc pour  $n = 2$

$$G_{Z_2}(s) = f(f(s)) = \exp\left(\mu(\exp(\mu(s-1)) - 1)\right).$$

ii) Probabilité que l'extinction ait lieu *exactement* à la génération (2)

L'évènement « extinction exactement à la génération 2 » est  $Z_1 > 0$  et  $Z_2 = 0$ . On peut écrire

$$\mathbb{P}(Z_2 = 0, Z_1 > 0) = \mathbb{P}(Z_2 = 0) - \mathbb{P}(Z_1 = 0).$$

Or

$$\mathbb{P}(Z_1 = 0) = f(0) = e^{-\mu} \text{ et } \mathbb{P}(Z_2 = 0) = G_{Z_2}(0) = f(f(0)) = \exp(\mu(e^{-\mu} - 1)).$$

Donc

$$\mathbb{P}(\text{extinction exactement en 2}) = \exp(\mu(e^{-\mu} - 1)) - e^{-\mu}$$

On peut obtenir la même formule en conditionnant sur  $Z_1 = k$  et sommant

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(Z_1 = k) \times e^{-\mu k}$$

**Exercice 3.**

Soit  $X \sim U(-\pi/2, \pi/2)$  (loi uniforme sur  $[-\pi/2, \pi/2]$ ), on définit  $Y = \cos(X)$ .

- i. La loi de  $Y$  est-elle absolument continue ?
- ii. Si oui, déterminer une version de sa densité.

**Solution**

(7) Sur  $[-\pi/2, \pi/2]$ ,  $\cos$  croit de 0 à 1 puis décroît de 1 à 0. La fonction  $\cos$  est paire. Pour  $x \in [0, 1]$

$$P\{\cos(U) \leq x\} = 2 \times P\left\{\arccos(x) \leq U \leq \frac{\pi}{2}\right\} = 1 - \frac{2 \arccos(x)}{\pi}$$

La fonction de répartition est continue, dérivable et elle égale à l'intégrale de sa dérivée qui s'annule en 0. La loi de  $Y$  est donc absolument continue, à support  $[0, 1]$ .

(8) Une version continue de la densité est obtenue en dérivant la fonction de répartition :

$$x \mapsto \frac{2}{\pi \sin(\arccos(x))} = \frac{2}{\pi \sqrt{1-x^2}}$$

pour  $x \in [0, 1]$

**Solution Chat-GPT 3.5**

La loi de  $Y$  est absolument continue (sans atome) et on peut donner explicitement sa

densité.

Remarquons d'abord que  $\cos$  envoie l'intervalle  $[-\pi/2, \pi/2]$  sur  $[0, 1]$ . Pour  $y \in (0, 1)$  les équations  $\cos x = y$  ont exactement deux solutions dans  $[-\pi/2, \pi/2]$ , à savoir  $x_1 = \arccos y$  et  $x_2 = -\arccos y$ . La densité de (la loi de)  $X$  est  $f_X(x) = \frac{1}{\pi}$  sur  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

En utilisant la formule de changement de variable pour fonctions non monotones :

$$f_Y(y) = \sum_{x:\cos x=y} \frac{f_X(x)}{|(\cos)'(x)|} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{|-\sin(\arccos y)|} + \frac{1}{|-\sin(-\arccos y)|} \right).$$

Or  $\sin(\arccos y) = \sqrt{1-y^2}$  et les deux termes sont égaux, d'où pour  $y \in (0, 1)$

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}.$$

Enfin  $f_Y(y) = 0$  pour  $y \notin [0, 1]$ . (Les points  $y = 0$  et  $y = 1$  n'ont pas d'atome : la densité diverge en 0 et 1 mais ces points ont probabilité nulle.)

### Critique de Chat-GPT 3.5

La propriété *absolue continuité* n'est pas équivalente à la propriété *être sans atome* (*diffuse*). La ou plutôt les lois de Cantor sont des exemples de lois sans atomes qui ne sont pas absolument continues.

La *formule de changement de variable pour fonctions non monotones* est vaseuse, on ne sait pas d'où elle sort, ni quel est son domaine d'application.

La discussion sur la divergence de la densité à la fin est elle aussi vaseuse.

### Exercice 4.

Soit  $X_1, \dots, X_n, \dots$  des variables aléatoires distribuées indépendamment selon une loi de Pareto de paramètre  $\alpha > 0$ ,  $P\{X_1 \geq t\} = t^{-\alpha}$ ,  $t \geq 1$ . Soit  $N$  indépendante des  $X_i$ , distribuée selon une loi de Poisson de paramètre  $\mu > 0$ . On définit  $Z$  par  $Z = \max_{i \leq N} X_i$ .

*Remarque* : Si  $N = 0$ , on convient de  $\max_{i \leq N} X_i = 0$ .

- i. Calculer la fonction de répartition de la loi de  $Z$ .
- ii. La loi de  $Z$  possède-t-elle une espérance finie ?

### Solution

(9) On note  $F_\alpha(x) = 1 - t^{-\alpha}$  pour  $t > 1$ , 0 sinon.

Pour  $x > 1$ , on a

$$\begin{aligned}
 F_Z(x) &= P\{Z \leq x\} \\
 &= \mathbb{E} [\mathbb{1}_{Z \leq x}] \\
 &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^N \mathbb{1}_{X_i \leq x} \mid \sigma(N) \right] \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^N \mathbb{E} [\mathbb{1}_{X_i \leq x}] \right] \\
 &= \mathbb{E} [(1 - x^{-\alpha})^N] \\
 &= \exp(\mu(1 - x^{-\alpha} - 1)) \\
 &= \exp(-\mu x^{-\alpha})
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour  $x \in [0, 1]$ ,  $F_Z(x) = P\{N = 0\} = \exp(-\mu) = \lim_{x \downarrow 1} F_Z(x)$

(10)  $Z$  est positive, son espérance est bien définie et donnée par

$$\mathbb{E}Z = \int_0^\infty (1 - F_Z(t))dt$$

$$\int_0^\infty (1 - F_Z(x))dx = (1 - \exp(-\mu)) + \int_1^\infty (1 - \exp(-\mu x^{-\alpha})) dx$$

Si  $\alpha > 1$ , en utilisant  $1 - \exp(-x) \leq x$  on vérifie que l'intégrale à droite est finie. L'espérance de  $Z$  est finie

Si  $\alpha \leq 1$ , l'intégrale est divergente,  $\mathbb{E}Z$  est infinie ( $Z$  n'est pas intégrable).

### Solution Chat-GPT 3.5

Rappel :  $N \sim \text{Poisson}(\mu)$  indépendant des  $X_i$ , et pour tout  $t \geq 1$   $P(X_1 \geq t) = t^{-\alpha}$ , donc  $P(X_1 \leq t) = 1 - t^{-\alpha}$ .

i) Fonction de répartition de  $Z = \max_{1 \leq i \leq N} X_i$  (avec convention  $\max_{i \leq 0} X_i = 0$ )

Pour  $t < 0$  on a évidemment  $F_Z(t) = 0$ . Pour  $0 \leq t < 1$  tous les  $X_i$  valent  $\geq 1$ , donc  $Z \leq t = N = 0$  et

$$F_Z(t) = P(Z \leq t) = P(N = 0) = e^{-\mu}.$$

Pour  $t \geq 1$ , conditionnons sur  $N$  :

$$P(Z \leq t) = \sum_{k=0}^\infty P(N = k) \times P(\max_{1 \leq i \leq k} X_i \leq t) = \sum_{k=0}^\infty e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} (1 - t^{-\alpha})^k.$$

La somme donne une exponentielle :

$$F_Z(t) = e^{-\mu} \exp(\mu(1 - t^{-\alpha})) = \exp(-\mu t^{-\alpha}), \quad t \geq 1.$$

Ainsi, de façon compacte (et continue en  $(t=1)$ ) :

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\mu} & 0 \leq t < 1 \\ \exp(-\mu t^{-\alpha}) & t \geq 1. \end{cases}$$

ii) Existence (ou non) de l'espérance de  $Z$

Utilisons la formule  $E[Z] = \int_0^\infty P(Z > t)dt$ . Avec la CDF ci-dessus :

$$E[Z] = \int_0^1 (1 - e^{-\mu})dt + \int_1^\infty (1 - e^{-\mu t^{-\alpha}})dt = 1 - e^{-\mu} + \int_1^\infty (1 - e^{-\mu t^{-\alpha}})dt.$$

Pour étudier la convergence de la seconde intégrale, posons  $u = t^{-\alpha}$  (donc pour  $t \in [1, \infty)$ ,  $u \in (0, 1]$ ). On obtient

$$\int_1^\infty (1 - e^{-\mu t^{-\alpha}})dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 (1 - e^{-\mu u})u^{-1/\alpha-1}du.$$

Quand  $u \rightarrow 0^+$ ,  $1 - e^{-\mu u} \sim \mu u$ , donc l'intégrande se comporte comme une constante fois  $u^{-1/\alpha}$ . L'intégrale  $\int_0^1 u^{-1/\alpha} du$  converge près de 0 si et seulement si  $-1/\alpha > -1$ , i.e. si et seulement si  $\alpha > 1$ .

Conclusion :

$$E[Z] < \infty \iff \alpha > 1.$$

Si  $\alpha > 1$ , une expression utile est

$$E[Z] = 1 - e^{-\mu} + \frac{1}{\alpha} \int_0^1 (1 - e^{-\mu u})u^{-1/\alpha-1}, du.$$

(Autrement dit l'espérance est finie pour  $\alpha > 1$  et infinie pour  $\alpha \leq 1$ .)

**Exercice 5.**

Le couple aléatoire  $(X, Y)$  à valeur sur  $]0, \infty)^2$  admet pour densité  $f$ .

- i. Si elle existe, quelle est la densité de la loi de  $XY$  (une expression intégrale peut suffire) ?
- ii. Préciser la densité lorsque  $X, Y$  sont indépendantes et uniformément distribuées sur  $[0, 1]$

**Solution**

i. La transformation  $]0, \infty)^2 \rightarrow ]0, \infty)^2$ ,  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}$  est bijective, continument différentiable, de matrice Jacobienne  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$  partout inversible et de déterminant Jacobien  $x$ .

La loi de  $\begin{pmatrix} X \\ XY \end{pmatrix}$  admet une densité sur  $]0, \infty)^2$  :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \frac{f(u, v/u)}{u}$$

La densité de la loi de  $XY$  sur  $]0, \infty)$  en  $v$  est obtenue en intégrant :

$$\int_{]0, \infty)} \frac{1}{u} f(u, v/u) du$$

ii. Dans cette configuration  $f(x, y) = \mathbb{1}_{0 < x < 1} \mathbb{1}_{0 < y < 1}$ . Pour  $v \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned}\int_{]0,\infty)} \frac{1}{u} f(u, v/u) du &= \int_{]0,\infty)} \mathbb{1}_{0 < u < 1} \mathbb{1}_{0 < v/u < 1} \frac{1}{u} du \\ &= \int_v^1 \frac{1}{u} du \\ &= \ln \frac{1}{v}.\end{aligned}$$

La fonction de répartition associée est  $v \mapsto v - v \ln v$ .